BACCALAURÉAT S AMÉRIQUE DU SUD 2024

Exercice 4

Soit a un réel strictement positif.
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = a\ln(x).$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
Soit x_0 un réel strictement supérieur à 1.

FIGURE 1 –

1. Déterminer l'abscisse du point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ et de l'axe des abscisses.

FIGURE 2 –

```
->  f(x) :=a*log(x);
```

(% o1) $$f(x) := a\log(x)$$

```
->  sol :solve(f(x)=0,x);
```

(sol) $$[x = 1]$$

```
->  sol[1];
```

(% o4) $$x = 1$$

L'abscisse du point d'intersection est égale à 1.

2. Vérifier que la fonction F définie par $F(x) = a[x\ln(x) - x]$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

FIGURE 3 –

```
->  pf(x) :=a*(x*log(x)-x);
```

(% o3) $$\mathrm{pf}(x) := a\ (x\log(x) - x)$$

```
->  diff(pf(x),x,1);
```

(% o4) $$a\log(x)$$

3. En déduire l'aire du domaine bleuté en fonction de a et de x_0.

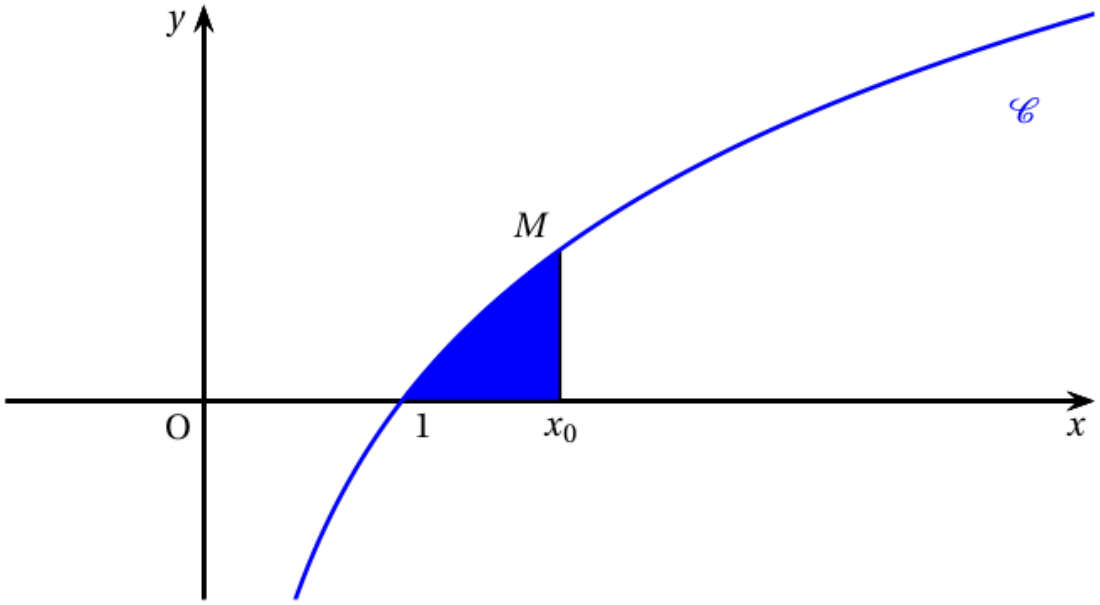

FIGURE 4 –

Connaissant une primitive de f appelée pf, il suffit de calculer pf(x0)-pf(1) pour avoir l'aire cherchée

```
->  factor(pf(x0)-pf(1));
```

(% o28) $$a\ (\mathrm{x0}\log(\mathrm{x0}) - \mathrm{x0} + 1)$$

On note T la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point M d'abscisse x_0.
On appelle A le point d'intersection de la tangente T avec l'axe des ordonnées et B le projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées.

FIGURE 5 –

On définit la fonction dérivée de f, appelée df, puis on définit la tangente à la courbe au point d'abscisse x0 (fonction T)

```
->  define(df(x),diff(f(x),'x));
```

(% o18) $$\mathrm{df}(x) := \frac{a}{x}$$

```
->  T(x) :=df(x0)*(x-x0)+f(x0);
```

(% o20) $$\mathrm{T}(x) := \mathrm{df}\ (\mathrm{x0})\ (x - \mathrm{x0}) + \mathrm{f}\ (\mathrm{x0})$$

Coordonnées du point A :

```
->  A :[0,T(0)];
```

(A) $$[0\ ,a\log(\mathrm{x0}) - a]$$

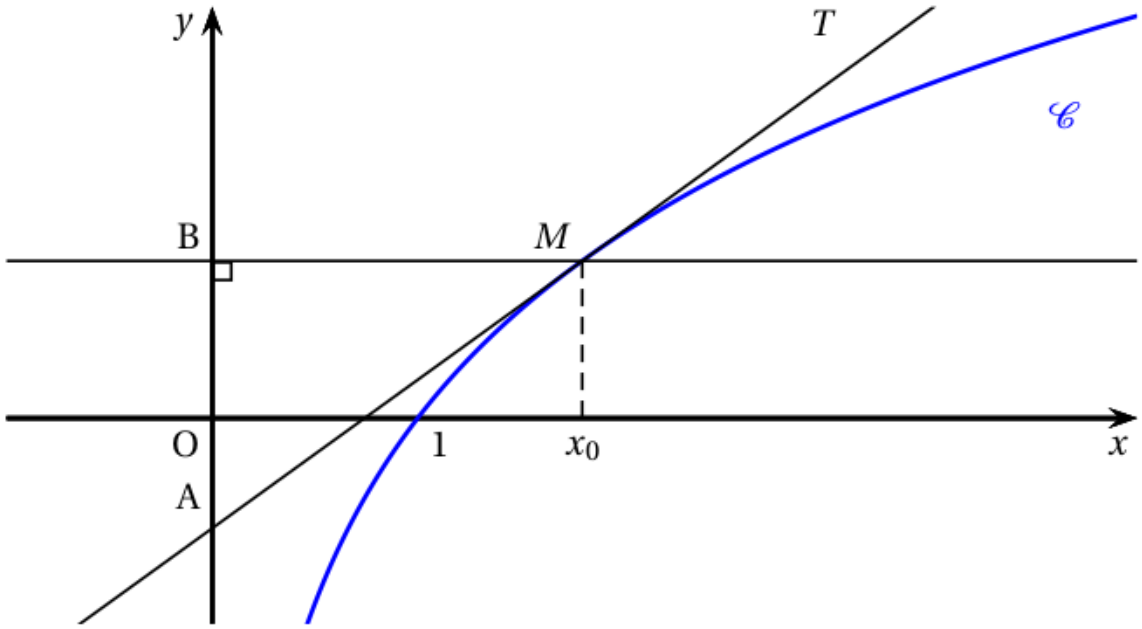

FIGURE 6 –

4. Démontrer que la longueur AB est égale à une constante (c'est-à-dire à un nombre qui ne dépend pas de x_0) que l'on déterminera.

Le candidat prendra soin d'expliciter sa démarche.

FIGURE 7 –

Coordonnées du point B :

```
->      B :[0,f(x0)] ;
```

(B) $[0\,,\,a\log\left(\mathrm{x0}\right)]$

Calcul de la distance AB :

```
->      abs(A-B) ;
```

(% o27) $[0\,,\,|a|]$

La distance AB est bien indépendante de x0.