wxMaxima pour l'Analyse Volume I

Auteur : Zachary Hannan, Solano Community College

Exercices du Chapitre 2 et leur corrigé

Présentation

Le manuel wxMaxima for Calculus Volume I, dont l'auteur est Zachary Hannan, propose l'étude de nombreux domaines de l'analyse à l'aide du logiciel Maxima et de son interface graphique wxMaxima. A l'occasion de la traduction française de ce manuel, la correction des exercices de chaque chapitre est proposée. Ce document reprend les exercices du manuel et leur correction à l'aide de wxMaxima.

La dernière version de ce document, ainsi que les fichiers source pour wxMaxima, sont téléchargeables sur le site https://maxima-french-doc.fr/, à la rubrique Documentation.

Enoncé des exercices

1. Calculer $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}^+}\cos x$ en utilisant une boucle de 10 étapes avec la formule $(1+\frac{1}{2^i})\frac{\pi}{3}$.
2. Calculer $\lim_{x\to-3^-}\frac{2}{x+3}$ en utilisant une boucle de 20 étapes (choisissez votre propre fonction pour créer la boucle).
3. Utiliser la commande `limit` pour trouver toutes les asymptotes de $f(x)=\frac{3-5x^2}{x^2-8}$. Représenter graphiquement $f(x)$ en y incluant toutes les asymptotes en rouge.
4. Utiliser la commande `limit` pour calculer $\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$.
5. Utiliser la commande `limit` pour calculer $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ Commenter le résultat obtenu.
6. Pour la fonction de l'Exemple 2.3.2, $f(x)=4e^{-0.3\cdot x}\cdot\sin(3\pi x)+2$, nous pouvons étudier $\lim_{x\to\infty}f(x)$ en utilisant le "théorème des gendarmes". Remplacez les valeurs maximale et minimale de la fonction sinus afin d'obtenir une courbe qui borne $f(x)$ par le haut (appelez-la `UPPER(x)`) et une courbe qui borne $f(x)$ par le bas (appelez-la `LOWER(x)`). Tracez $f(x)$ avec ces deux courbes en rouge. Enfin, utilisez `limit` pour montrer que les bornes supérieure et inférieure tendent toutes deux vers 2 lorsque $x\to\infty$ (le théorème des gendarmes vous indique que $f(x)\to2$ également).
7. La *dérivée* d'une fonction $f(x)$ peut s'écrire $f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Utiliser cette définition pour trouver la dérivée de $\cos x$ avec wxMaxima.
8. Une fonction $f(x)$ est *continue* en $x=a$ si $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$. Utiliser wxMaxima pour montrer que $f(x)=\tan x$ est continue en $x=\frac{\pi}{3}$.
9. Le *Théorème des Valeurs Intermédiaires* stipule que, pour toute fonction continue sur $[a,b]$ pour laquelle $f(a)\neq f(b)$, et pour tout nombre u compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un c dans (a,b) tel que $f(c)=u$. En d'autres termes, si $f(x)$ est continue, alors toutes les valeurs y entre $f(a)$ et $f(b)$ doivent apparaître sur l'intervalle $[a,b]$. Définissons $f(x)=e^{-x^2}$. Appliquons le Théorème des Valeurs Intermédiaires sur l'intervalle $[0,1]$ en utilisant $u=0,5$; c'est-à-dire, trouvons c.
10. En utilisant l'exemple 2.3.1 comme modèle, appliquez la définition formelle de la limite à $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos x)$. On prendra $\epsilon=.001$.
11. En prenant $M=1000$, appliquez la définition formelle de la limite pour illustrer que $\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}=\infty$.
12. La *fonction échelon* (qui est aussi appelée la fonction Θ) est une fonction par morceaux définie par $\Theta(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1 & x\geq0\end{cases}$. $\Theta(x)$ est implémentée dans wxMaxima comme `unit_step(x)`.
    Calculer $\lim_{x\to0^-}\Theta(x)$, $\lim_{x\to0^+}\Theta(x)$ et $\lim_{x\to0}\Theta(x)$. Citer un théorème pour expliquer pourquoi cette dernière limite n'existe pas.

Corrigé des exercices

WX M AXIMA POUR L' ANALYSE , VOLUME I CORRECTION DES EXERCICES DU CHAPITRE 2 FICHIER : CORRECTION-CHAPITRE 2. WXMX

1 Exercice1

```
f(i):=(1+1/2^i)·%pi/3;
```

$$f(i):=\frac{\left(1+\frac{1}{2^i}\right)\pi}{3}$$

```
makelist(print(
    "x=",float(f(i)),"  f(x)=",float(cos(f(i)) )
  ) ,i,1,10)$
```

x= 1.570796326794896 *f(x)*= 0.0
x= 1.308996938995747 *f(x)*= 0.2588190451025207
x= 1.178097245096172 *f(x)*= 0.3826834323650898
x= 1.112647398146385 *f(x)*= 0.4422886902190012
x= 1.079922474671491 *f(x)*= 0.4713967368259978
x= 1.063560012934044 *f(x)*= 0.4857633937163401
x= 1.055378782065321 *f(x)*= 0.4928981922297841
x= 1.051288166630959 *f(x)*= 0.4964532497186331
x= 1.049242858913778 *f(x)*= 0.4982276669727818
x= 1.048220205055188 *f(x)*= 0.4991140944783476

```
limit(cos(x),x,%pi/3,plus);
```

$$\frac{1}{2}$$

2 Exercice 2

```
F(x):=2/(x+3);
```

$$F(x):=\frac{2}{x+3}$$

```
(print("x "," "," "," f"),
    for i:1 thru 20 do
    (x: float(−3−1/(5^i)),
     f: F(x),
     print(x,"","",f))
    );
```

x *f*
−3.2 −9.999999999999992
−3.04 −49.99999999999996
−3.008 −249.9999999999997
−3.0016 −1250.000000000137
−3.00032 −6250.000000002423
−3.000064 −31249.99999996874
−3.0000128 −156250.0000009279
−3.00000256 −781250.0000046397
−3.000000512 −3906249.998667945
−3.0000001024 $-1.953124999333973\ 10^{7}$
−3.00000002048 $-9.765625039021512\ 10^{7}$
−3.000000004096 $-4.882812519510756\ 10^{8}$
−3.0000000008192 $-2.441406789151089\ 10^{9}$
−3.00000000016384 $-1.22070273283112\ 10^{10}$
−3.000000000032768 $-6.103513664155604\ 10^{10}$
−3.000000000006553 $-3.051839552328045\ 10^{11}$
−3.00000000000131 $-1.526126610427142\ 10^{12}$
−3.000000000000262 $-7.63321970740762\ 10^{12}$
−3.000000000000052 $-3.81660985370381\ 10^{13}$
−3.00000000000001 $-1.876499844737706\ 10^{14}$
done

3 Exercice 3

```
remfunction(f);
```

$[f]$

```
remvalue(x);
```

$[x]$

```
f(x):=(3−5·x^2)/(x^2−8);
```

$$f(x):=\frac{3-5\,x^2}{x^2-8}$$

```
limit(f(x),x,inf);
```

-5

```
limit(f(x),x,minf);
```

-5

```
solve(part(f(x),2)=0,x);
```

$$\left[x=-2^{3/2},x=2^{3/2}\right]$$

```
limit(f(x),x,2^(3/2),plus);
```

$-\infty$

```
limit(f(x),x,2^(3/2),minus);
```

∞

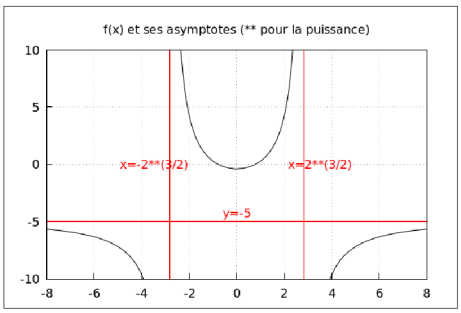
```
limit(f(x),x,−2^(3/2),plus);
```

∞

```
limit(f(x),x,−2^(3/2),minus);
```

$-\infty$

```
wxdraw2d(
grid=true,
xaxis=true,
yaxis=true,
   xrange=[−8,8],
   yrange=[−10,10],
title="f(x) et ses asymptotes (** pour la puissance)",
color=black,
explicit((f(x)),x,−8,8),
color=red,
explicit(−5,x,−8,8),
   parametric(2^(3/2),t,t,−10,10),
    parametric(−2^(3/2),t,t,−10,10),
   label(["y=-5",0,−4.2]),
    label(["x=2**(3/2)",3.5,0]),
    label(["x=-2**(3/2)",−3.5,0])
);
```



4 Exercice 4

```
'limit((sqrt(x)−sqrt(3))/(x−3),x,3)=limit((sqrt(x)−sqrt(3))/(x−3),x,3);
```

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

5 Exercice 5

```
'limit((1+1/n)^n,n,inf)=limit((1+1/n)^n,n,inf);
```

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+1\right)^n=\%e$$

```
makelist(print("pour n=",n," on obtient ",float((1+1/n)^n)),n,1,200,10)$
```

pour n= 1 *on obtient* 2.0
pour n= 11 *on obtient* 2.604199011897531
pour n= 21 *on obtient* 2.656263213926105
pour n= 31 *on obtient* 2.675696305914687
pour n= 41 *on obtient* 2.68585634753775
pour n= 51 *on obtient* 2.692102208915018
pour n= 61 *on obtient* 2.696330496282263
pour n= 71 *on obtient* 2.699382869968301
pour n= 81 *on obtient* 2.701689991383449
pour n= 91 *on obtient* 2.703495102855856
pour n= 101 *on obtient* 2.704945977485157
pour n= 111 *on obtient* 2.706137572039048
pour n= 121 *on obtient* 2.707133688188025
pour n= 131 *on obtient* 2.707978781315433
pour n= 141 *on obtient* 2.708704776679184
pour n= 151 *on obtient* 2.709335193470512
pour n= 161 *on obtient* 2.709887740639371
pour n= 171 *on obtient* 2.710376006751071
pour n= 181 *on obtient* 2.710810592487085
pour n= 191 *on obtient* 2.711199889082818

Il s'agit d'une forme indéterminée classique qui est une manière de définir le nombre e.

6 Exercice 6

```
f(x):=4·%e^(−.3·x)·sin(3·%pi·x)+2;
```

$$f(x):=4\,\%e^{(-0.3)\,x}\sin(3\,\pi\,x)+2$$

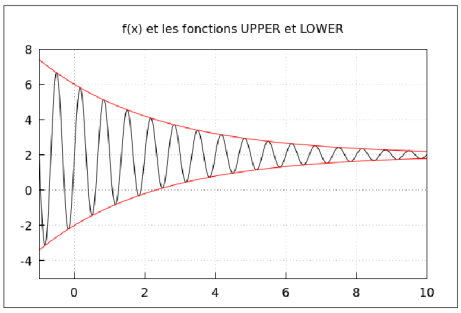
sin(3πx) variant entre 1 et -1, on pose :

```
UPPER(x):=4·%e^(−.3·x)+2;LOWER(x):=−4·%e^(−.3·x)+2;
```

$$\mathrm{UPPER}(x):=4\,\%e^{(-0.3)\,x}+2$$

$$\mathrm{LOWER}(x):=(-4)\,\%e^{(-0.3)\,x}+2$$

```
wxdraw2d(
grid=true,
xaxis=true,
yaxis=true,
   xrange=[−1,10],
   yrange=[−5,8],
title="f(x) et les fonctions UPPER et LOWER",
color=black,
explicit((f(x)),x,−1,10),
color=red,
  explicit(UPPER(x),x,−1,10),
explicit(LOWER(x),x,−1,10)
);
```




```
limit(UPPER(x),x,inf);
```

rat: replaced −0.3 by −3/10 = −0.3

$$2$$

```
limit(LOWER(x),x,inf);
```

rat: replaced −0.3 by −3/10 = −0.3

$$2$$

7 Exercice 7

```
delta(x,h):=(cos(x+h)−cos(x))/h;
```

$$\mathrm{delta}(x,h):=\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h}$$

```
limit(delta(x,h),h,0);
```

$$-\sin(x)$$

On retrouve bien que (cos)'=-sin

8 Exercice 8

```
print("tan(π/3)=",tan(%pi/3))$
```

tan(π/3)= $\sqrt{3}$

```
'limit(tan(x),x,%pi/3)=limit(tan(x),x,%pi/3);
```

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\tan(x)=\sqrt{3}$$

9 Exercice 9

```
f(x):=exp(−x^2);
```

$$f(x):=\exp\left(-x^2\right)$$

```
solve(f(x)=0.5,x);
```

rat: replaced −0.5 by −1/2 = −0.5

$$\left[x=-\sqrt{\log(2)},x=\sqrt{\log(2)}\right]$$

```
find_root(f(x)=0.5,x,0,1);
```

0.8325546111576978

La valeur de c est donc sqrt(log(2))

10 Exercice 10

```
f(x):=sin(x)+cos(x);
```

$$f(x):=\sin(x)+\cos(x)$$

```
limit(f(x),x,%pi/2);
```

1

```
L:1+0.001;l:1−0.001;
```

1.001
0.999

On cherche alors les valeurs de x correspondant à L et l. La résolution exacte ne donnant rien, on cherche les solutions en valeur approchée sachant que π/2 vaut environ 1,57, ce qui permet de prendre comme intervalle [1,2].

```
float(solve(f(x)=L,x));
```

rat: replaced −1.001 by −1001/1000 = −1.001

$$\left[\sin(x)=-0.001\,(1000.0\cos(x)-1001.0)\right]$$

```
x1:find_root(f(x)=L,x,1,2);
```

1.569795826127228

```
x2:find_root(f(x)=l,x,1,2);
```

1.571795827460565

Pour x dans l'intervalle [x1;x2], f(x) est à moins de 0,001 de la limite 1 (à trois décimales près). On cherche la plus petite distance entre π/2 et x1 ou x2 :

```
delta:min(%pi/2−x1,%pi/2−x2);
```

rat: replaced −0.002000001333336776 by −521999/260999326 = −0.002000001333336776

$$\frac{\pi}{2}-1.571795827460565$$

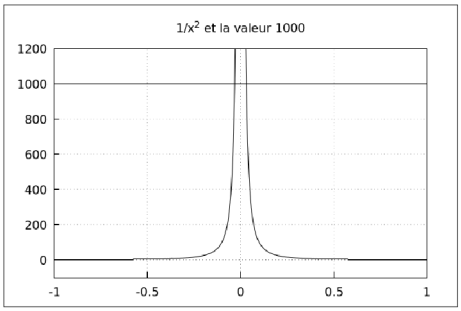
x2 réalise ce minimum. En conclusion, pour |x-π/2|<x2 on a bien |f(x)-1)<0.001

11 Exercice 11

```
limit(1/x^2,x,0);
```

∞

```
wxdraw2d(
grid=true,
xaxis=true,
yaxis=true,
   xrange=[−1,1],
   yrange=[−100,1200],
title="1/x^2 et la valeur 1000",
color=black,
explicit(1/x^2,x,−1,1),
   explicit(1000,x,−1,1)
);
```



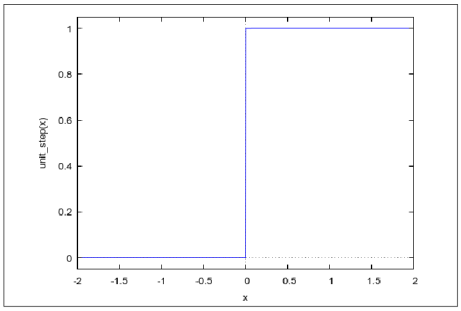

```
float(solve(1/x^2=1000,x));
```

$$[x=-0.03162277660168378, x=0.03162277660168378]$$

Pour |x|<0.03 on constate que f(x)>1000, CQFD

12 Exercice 12

```
wxplot2d(unit_step(x),[x,−2,2]);
```




```
'limit(unit_step(x),x,0,minus)=limit(unit_step(x),x,0,minus);
```

$$\lim_{x\to 0-} \mathrm{unit_step}(x)=0$$

```
'limit(unit_step(x),x,0,plus)=limit(unit_step(x),x,0,plus);
```

$$\lim_{x\to 0+} \mathrm{unit_step}(x)=1$$

```
'limit(unit_step(x),x,0)=limit(unit_step(x),x,0);
```

$$\lim_{x\to 0} \mathrm{unit_step}(x)=\mathit{und}$$

Les limites à droite et à gauche de 0 étant différentes, la limite en 0 n'existe donc pas.