wxMaxima pour l'Analyse Volume I

Auteur : Zachary Hannan, Solano Community College

Exercices du Chapitre 3 et leur corrigé

Présentation

Le manuel wxMaxima for Calculus Volume I, dont l'auteur est Zachary Hannan, propose l'étude de nombreux domaines de l'analyse à l'aide du logiciel Maxima et de son interface graphique wxMaxima. A l'occasion de la traduction française de ce manuel, la correction des exercices de chaque chapitre est proposée. Ce document reprend les exercices du manuel et leur correction à l'aide de wxMaxima.

La dernière version de ce document, ainsi que les fichiers source pour wxMaxima, sont téléchargeables sur le site https://maxima-french-doc.fr/, à la rubrique Documentation.

Enoncé des exercices

1. Définissez la fonction $f(x) = (x-2)(x)(x+1)$. Dans le style de l'exemple 3.1.2, trouvez la pente de la tangente en $x = 1$ en utilisant `makelist` pour générer une séquence de dix intervalles $[1, 2], [1, 1.5], [1, 1.25], \ldots$. Faites un tracé de $f(x)$ avec la suite des droites sécantes approchant la tangente.
2. Utilisez la "définition par la limite" de la dérivée pour calculer les formules donnant les dérivées des fonctions suivantes, puis vérifiez les résultats avec la commande `diff`.
   a. $f(x) = \tan x$ b. $f(x) = \sec x$ c. $f(x) = \ln(\cos x)$
3. Définir $f(x) = \sec x$. Utiliser `diff` pour trouver la pente de la tangente en $x = 1.2$. Finalement, représenter graphiquement $f(x)$ ainsi que sa tangente.
4. Utilisez les définitions de $\cosh x$ et $\sinh x$ et la « règle du produit » pour trouver $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cosh x \cdot \sinh x)$ « manuellement » dans le style de l'exemple 3.3.2. Vérifiez votre réponse en utilisant `diff` et les fonctions intégrées `cosh` et `sinh` de wxMaxima. Une simplification sera nécessaire pour vérifier votre réponse !
5. Lors du calcul de la dérivée d'une fonction trigonométrique compliquée, il peut être utile de simplifier le résultat en utilisant `trigsimp` (simplifie en utilisant les identités Pythagoriciennes), `trigreduce` (simplifie en utilisant les identités de somme d'angles), `trigexpand` (développe en utilisant les identités de somme d'angles) et/ou `trigrat` (simplifie les expressions rationnelles de fonctions trigonométriques). Définissez $f(x) = \sin x \cdot \cos^2(2x)$ et trouvez $f'(x)$ en utilisant `diff`. Utilisez `trigexpand` puis `trigsimp` pour exprimer votre réponse entièrement en termes de puissances de $\cos x$.
6. En suivant l'idée de l'exemple 3.4.1 et de l'exemple 3.4.2, calculez $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}$ pour

   a. $h(x) = \cos(3x^3 - 4x + 5)$ b. $h(x) = e^{\sqrt{\sin x}}$

   N'oubliez pas d'utiliser `kill(all)` si les affectations précédentes interfèrent avec vos calculs.
7. Calculer la dérivée cinquième de $f(x) = \sec x$ et simplifier l'expression obtenue autant que possible.
8. Le théorème des accroissements finis stipule que (à condition qu'une fonction soit continue sur $[a, b]$ et différentiable sur (a, b)), nous pouvons toujours trouver $x = c$ sur (a, b) pour lequel la pente de la tangente est égale à la pente de la sécante reliant $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$. C'est-à-dire, nous pouvons trouver c tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Pour la fonction $f(x) = \tan^{-1} x$, trouvez c pour l'intervalle $[0.5, 2.5]$. Tracez $f(x)$ en noir avec les lignes sécante et tangente appropriées en rouge. Commentez la relation géométrique entre la ligne sécante et la ligne tangente.

9. Soit $y = \cos^{-1} x$. Pour obtenir la formule de $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, nous devons inverser la formule en $\cos y = x$ et utiliser la différentiation implicite. En suivant le procédé de l'exemple 3.4.4, calculez $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, en incluant une étape finale de substitution de la définition originale de y et simplifiez le résultat si nécessaire pour obtenir une formule explicite pour $y'(x)$.

10. Pour effectuer une "approximation linéaire", nous utilisons $f(a)$ et $f'(a)$ pour tracer une droite tangente en $x = a$. Ensuite (tant que Δx est relativement petit), nous pouvons approximer $f(a + \Delta x)$ en utilisant l'équation de la tangente au lieu de $f(x)$ elle-même. Ceci est un cas particulier d'une série de Taylor tronquée – une astuce qui est souvent utilisée en sciences physiques pour simplifier un modèle mathématique.

    Définissez $f(x) = \sin x$ et trouvez l'équation de la tangente en $x = 0$. Appelez votre tangente $T(x)$. Utilisez maintenant votre tangente pour faire une approximation linéaire de $f(0.1)$; c'est-à-dire, calculez $T(0.1)$. Comparez avec la valeur réelle de $f(0.1)$. Quelle est l'erreur commise par l'approximation linéaire ? Faites un tracé de $f(x)$ et $T(x)$ sur $[0, 0.2]$ pour mettre en évidence le comportement de l'approximation linéaire près de $x = 0$.

11. L'approximation binomiale est une autre approximation linéaire utile. Supposons que $f(x) = (1 + x)^{50}$. Utilisez une approximation linéaire près de $x = 0$ pour estimer 1.05^{50}. Vérifiez votre réponse en calculant réellement 1.05^{50} et en calculant l'erreur commise par l'approximation. Note : cette approximation est surtout utile pour simplifier une expression variable $(1 + x)^n$ en supposant que x est "petit".

12. Pour l'ellipse $\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+3)^2}{25} = 1$, utilisez la différentiation implicite pour trouver une expression pour $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ en fonction de x et y. Trouvez les équations des deux tangentes qui ont une pente de $\frac{1}{2}$. Afin de trouver les points pour lesquels on a une pente de $\frac{1}{2}$, vous devrez résoudre un système d'équations : une pour la dérivée et une pour l'ellipse d'origine. La syntaxe appropriée pour résoudre un système est `solve([equation1,equation2],[x,y]);`.

    Trouvez les équations des deux droites tangentes perpendiculaires à celles ayant une pente de $\frac{1}{2}$. Enfin, tracez l'ellipse en noir avec les quatre lignes tangentes en rouge. Utilisez `dimensions` pour forcer l'ellipse à apparaître avec le bon rapport visuel.

13. Trouvez la généralisation de la règle du produit pour cinq fonctions. Autrement dit, trouvez une expression générale pour $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x) \cdot g(x) \cdot h(x) \cdot i(x) \cdot j(x)]$.

14. En une dimension, la position d'une particule est donnée par sa coordonnée x. Une particule en mouvement aura différentes valeurs de x à différents moments, et nous pouvons tracer son mouvement en utilisant des paires ordonnées (t, x) pour produire un graphique appelé graphique de *position-temps*. La position est une *fonction* du temps, $x(t)$, car à tout moment donné, une particule ne peut être qu'à un seul endroit ! La vitesse moyenne entre deux instants est donnée par le simple rapport $v_{avg} = \frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}$. Sauf indication contraire, ce manuel utilisera toujours les mètres (m) pour les unités de distance et les secondes (s) pour les unités de temps, donc v_{avg} doit avoir des unités de m/s.

    Supposons qu'une fusée soit observée avec la fonction de position approximative $x(t) = 2.35 \cdot t^3 - 5.1 \cdot t^2 + 4$.

    (a) Trouvez la vitesse moyenne de $t = 2\,\mathrm{s}$ à $t = 3\,\mathrm{s}$; c'est-à-dire, trouvez v_{avg} sur l'intervalle de temps $[2, 3]$.

    (b) Répétez votre calcul pour l'intervalle de temps $[2, 2.5]$, $[2, 2.25]$, et ainsi de suite pour 10 étapes en utilisant `makelist`. La limite semble-t-elle exister ? Quelle est sa valeur ?

    (c) En prenant la vitesse moyenne sur un intervalle très petit, nous trouvons en fait la vitesse *instantanée* (la vitesse n'a pas le temps de changer de manière significative sur un intervalle de temps très petit). En termes de dérivées, comment la vitesse instantanée doit-elle être définie ?

Corrigé des exercices

WX MAXIMA POUR L' ANALYSE , VOLUME I CORRECTION DES EXERCICES DU CHAPITRE 3 FICHIER : CORRECTION-CHAPITRE3. WXMX

1 Exercice1

```
f(x):=(x−2)·x·(x+1);
```

$$f(x):=(x-2)\,x\,(x+1)$$

```
SLOPE(a,b):=(f(b)−f(a))/(b−a)$
```

```
SECANT(x,a,b):=SLOPE(a,b)·(x−a)+f(a)$
```

On utilise la suite 1+1/2^(i-1) pour i variant de 1 à 10 pour définir l'extrémité de l'intervalle cherché

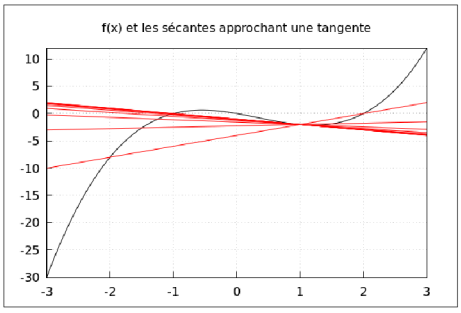
```
(print ("intervalle",".........","pente"),
for i:1 thru 10 do
(S:float(SLOPE(1,1+1/2^(i−1))),
print("[1,",1.0+1/2^(i−1),"]",".........",S))
);
```

intervalle ..... pente
[1, 2.0 *]* 2.0
[1, 1.5 *]* 0.25
[1, 1.25 *]* ..... −0.4375
[1, 1.125 *]* ..... −0.734375
[1, 1.0625 *]* ..... −0.87109375
[1, 1.03125 *]* ..... −0.9365234375
[1, 1.015625 *]* ..... −0.968505859375
[1, 1.0078125 *]* ..... −0.98431396484375
[1, 1.00390625 *]* ..... −0.9921722412109375
[1, 1.001953125 *]* ..... −0.9960899353027344
done

```
L:makelist(explicit(SECANT(x,1,1.0+1/2^(i−1)),x,−3,3),i,1,10);
```

$$[\mathrm{explicit}(2.0\,(x-1)-2,x,-3,3),\mathrm{explicit}(0.25\,(x-1)-2,x,-3,3),\mathrm{explicit}(-0.4375\,(x-1)-2,x,-3,3),\mathrm{explicit}(-0.734375\,(x-1)-2,x,-3,3),\mathrm{explicit}(-0.87109375\,(x-1)-2,x,-3,3),\mathrm{explicit}(-0.9365234375\,(x-1)-2,x,-3,3),\mathrm{explicit}(-0.968505859375\,(x-1)-2,x,-3,3),\mathrm{explicit}(-0.98431396484375\,(x-1)-2,x,-3,3),\mathrm{explicit}(-0.9921722412109375\,(x-1)-2,x,-3,3),\mathrm{explicit}(-0.9960899353027344\,(x-1)-2,x,-3,3)]$$

```
wxdraw2d(
grid=true,
xaxis=true,
dimensions=[600,600],
title="f(x) et les sécantes approchant une tangente",
color=black,
explicit(f(x),x,−3,3),
color=red,
L
);
```



2 Exercice 2

```
derivee(f,x):=limit((f(x+h)−f(x))/h,h,0);
```

$$\text{derivee}(f,x):=\text{limit}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h},h,0\right)$$

```
f(x):=tan(x);
```

$$f(x):=\tan(x)$$

```
derivee(f,x);
```

$$\frac{1}{\cos(x)^2}$$

Rappel : la fonction sec pour maxima est 1/cos

```
diff(f(x),x);
```

$$\sec(x)^2$$

```
f(x):=sec(x);
```

$$f(x):=\sec(x)$$

```
derivee(f,x);
```

$$\frac{\sin(x)}{\cos(x)^2}$$

```
diff(f(x),x);
```

$$\sec(x)\tan(x)$$

```
f(x):=log(cos(x));
```

$$f(x):=\log(\cos(x))$$

```
derivee(f,x);
```

$$-\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

```
diff(f(x),x);
```

$$-\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

3 Exercice 3

```
f(x):=sec(x);
```

$$f(x):=\sec(x)$$

Pente de la tangente :

```
a:subst(1.2,x,diff(f(x),x));
```

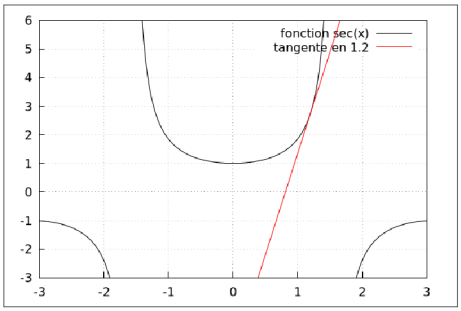
7.098376094754992

Equation de la tangente en x=1.2 :

```
g(x):=a·(x−1.2)+f(1.2);
```

$$g(x):=a\,(x-1.2)+f(1.2)$$

```
wxdraw2d(
 title="",
grid=true,
xaxis=true,
yaxis=true,
 xrange=[−3,3],
 yrange=[−3,6],
color=black,
line_width=1,
key="fonction sec(x)",
explicit(sec(x),x,−3,3),
color="red",
   key="tangente en 1.2",
explicit(g(x),x,−3,3)
)
;
```



4 Exercice 4

On définit les fonctions cosh et sinh manuellement en leur donnant un nouveau nom

```
cosh1(x):=(exp(x)+exp(−x))/2;sinh1(x):=(exp(x)−exp(−x))/2;
```

$$\cosh1(x):=\frac{\exp(x)+\exp(-x)}{2}$$

$$\sinh1(x):=\frac{\exp(x)-\exp(-x)}{2}$$

On définit les dérivées de ces fonctions créés précedemment.

```
define(cosh1prime(x),diff(cosh1(x),x));
```

$$\cosh1prime(x):=\frac{\%e^{x}-\%e^{-x}}{2}$$

```
define(sinh1prime(x),diff(sinh1(x),x));
```

$$\sinh1prime(x):=\frac{\%e^{x}+\%e^{-x}}{2}$$

On définit la dérivée du produit manuellement :

```
deriveemanuelle(x):=cosh1prime(x)·sinh1(x)+cosh1(x)·sinh1prime(x);
```

$$deriveemanuelle(x):=\cosh1prime(x)\sinh1(x)+\cosh1(x)\sinh1prime(x)$$

```
expand(ratsimp(deriveemanuelle(x)));
```

$$\frac{\%e^{2x}}{2}+\frac{\%e^{-2x}}{2}$$

On utilise maintenant la dérivée du produit en utilisant les fonctions prédéfinies de Maxima :

```
define(deriveeproduit(x),diff(cosh(x)·sinh(x),x));
```

$$deriveeproduit(x):=\sinh(x)^{2}+\cosh(x)^{2}$$

```
expand(trigrat(deriveeproduit(x)));
```

$$\frac{\%e^{2x}}{2}+\frac{\%e^{-2x}}{2}$$

CQFD, on retrouve la même expression

5 Exercice 5

```
kill(all);
```

done

```
f(x):=sin(x)·cos(2·x)^2;
```

$$f(x):=\sin(x)\cos(2x)^2$$

```
define(fprime(x),diff(f(x),x));
```

$$\mathrm{fprime}(x):=\cos(x)\cos(2x)^2-4\sin(x)\cos(2x)\sin(2x)$$

```
trigexpand(fprime(x));
```

$$\cos(x)\left(\cos(x)^2-\sin(x)^2\right)^2-8\cos(x)\sin(x)^2\left(\cos(x)^2-\sin(x)^2\right)$$

```
trigsimp(%);
```

$$20\cos(x)^5-28\cos(x)^3+9\cos(x)$$

6 Exercice 6

réponse pour le a)

```
h(x):=cos(3·x^3−4·x+5);
```

$$h(x):=\cos\left(3x^3-4x+5\right)$$

```
f(x):=3·x^3−4·x+5;
```

$$f(x):=3x^3-4x+5$$

```
g(x):=cos(x);
```

$$g(x):=\cos(x)$$

```
g(f(x));
```

$$\cos\left(3x^3-4x+5\right)$$

```
define(gprime(x),diff(g(x),x));
```

$$\mathrm{gprime}(x):=-\sin(x)$$

```
define(fprime(x),diff(f(x),x));
```

$$\mathrm{fprime}(x):=9x^2-4$$

```
gprime(f(x))·fprime(x);
```

$$-\left(9x^2-4\right)\sin\left(3x^3-4x+5\right)$$

```
diff(h(x),x);
```

$$-\left(9x^2-4\right)\sin\left(3x^3-4x+5\right)$$

réponse pour le b)

```
h(x):=exp(sqrt(sin(x)));
```

$$h(x):=\exp\left(\sqrt{\sin(x)}\right)$$

```
h=uovow
```

```
u(x):=exp(x)$v(x):=sqrt(x)$w(x):=sin(x)$
```

```
du_dv:diff(u(v),v);
```

$$\%e^v$$

```
dv_dw:diff(v(w),w);
```

$$\frac{1}{2\sqrt{w}}$$

```
dw_dx:diff(w(x),x);
```

$$\cos(x)$$

```
derivee:du_dv·dv_dw·dw_dx;
```

$$\frac{\%e^{v}\cos(x)}{2\sqrt{w}}$$

```
subst(v(w(x)),v,subst(w(x),w,derivee));
```

$$\frac{\%e^{\sqrt{\sin(x)}}\cos(x)}{2\sqrt{\sin(x)}}$$

```
diff(h(x),x);
```

$$\frac{\%e^{\sqrt{\sin(x)}}\cos(x)}{2\sqrt{\sin(x)}}$$

7 Exercice 7

```
define(der5(x),diff(sec(x),x,5));
```

$$\mathrm{der5}(x):=\sec(x)\tan(x)^{5}+58\sec(x)^{3}\tan(x)^{3}+61\sec(x)^{5}\tan(x)$$

```
trigsimp(der5(x));
```

$$\frac{\sin(x)^{5}+58\sin(x)^{3}+61\sin(x)}{\cos(x)^{6}}$$

8 Exercice 8

```
f(x):=atan(x);
```

$$\mathrm{f}(x):=\mathrm{atan}(x)$$

```
solutions:solve(diff(f(c),c)=( f(2.5)−f(0.5))/(2.5−0.5),c);
```

rat: replaced −0.3633211703408627 by −7985125/21978144 = −0.3633211703408622

$$\left[c=-\frac{\sqrt{13993019}}{5\sqrt{319405}},c=\frac{\sqrt{13993019}}{5\sqrt{319405}}\right]$$

```
ev( solutions   ,numer);
```

$$[c=-1.323777064763136,c=1.323777064763136]$$

```
c:rhs(solutions[2]);
```

$$\frac{\sqrt{13993019}}{5\sqrt{319405}}$$

```
pentesecante:(f(2.5)−f(0.5))/(2.5−0.5);
```

$$0.3633211703408627$$

```
secante(x):=pentesecante·x+f(0.5)−pentesecante·0.5;
```

$$\mathrm{secante}(x):=pentesecante\,x+\mathrm{f}(0.5)+(-pentesecante)\,0.5$$

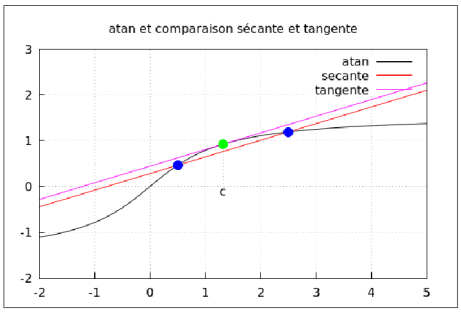
```
define(fprime(x),diff(f(x),x));
```

$$\mathrm{fprime}(x):=\frac{1}{x^{2}+1}$$

```
tangente(x):=fprime(c)·(x−c)+f(c);
```

$$\mathrm{tangente}(x):=\mathrm{fprime}(c)(x-c)+\mathrm{f}(c)$$

```
wxdraw2d(
 title="atan et comparaison sécante et tangente",
grid=true,
xaxis=true,
yaxis=true,
 xrange=[−2,5],
 yrange=[−2,3],
color=black,
line_width=1,
key="atan",
explicit(atan(x),x,−5,5),
   color=red,
   key="secante",
  explicit(secante(x),x,−5,5),
   key="tangente",
   color=magenta,
   explicit(tangente(x),x,−5,5),
   color=blue,
   point_type=7,
   point_size=2,
   key="",
   points([[0.5,f(0.5)],[2.5,f(2.5)]]),
   color=green,
   points([[c,f(c)]]),
   color=black,
   label(["c",c,−0.1] ),
   line_type=dots,
   parametric(c,t,t,0,f(c))
)
$
```



La sécante et la tangente sont des droites parallèles.

9 Exercice 9

```
relation:x=cos(y);
```

$$x=\cos(y)$$

```
depends(y,x);
```

$$[y(x)]$$

```
etap1:diff(relation,x);
```

$$1=-\sin(y)\left(\frac{d}{dx}y\right)$$

```
etap2:etap1/−sin(y);
```

$$-\frac{1}{\sin(y)}=\frac{d}{dx}y$$

```
relation2:cos(y)^2+sin(y)^2=1;
```

$$\sin(y)^2+\cos(y)^2=1$$

```
valeur:rhs(solve(relation2,y)[2]);
```

$$\sqrt{1-\cos(y)^2}$$

```
solution:subst(valeur,sin(y),etap2);
```

$$-\frac{1}{\sqrt{1-\cos(y)^2}}=\frac{d}{dx}y$$

```
subst(x,cos(y),solution);
```

$$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{d}{dx}y$$

vérification : dérivée de acos

```
diff(acos(x),x);
```

$$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

10 Exercice 10

```
f(x):=sin(x);
```

$$f(x):=\sin(x)$$

```
define(fprime(x),diff(f(x),x));
```

$$\mathrm{fprime}(x):=\cos(x)$$

```
T(x):=fprime(0)·(x−0)+f(0);
```

$$T(x):=\mathrm{fprime}(0)(x-0)+f(0)$$

```
T(0.1);
```

$$0.1$$

```
f(0.1);
```

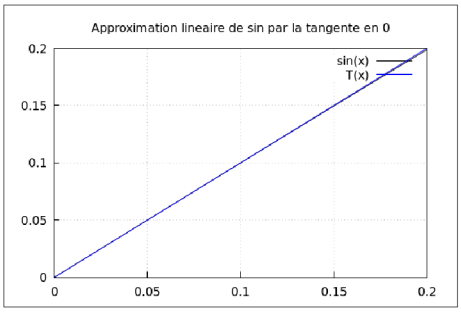
$$0.09983341664682816$$

Erreur commise par l'approximation linéaire :

```
δ:abs(f(0.1)−T(0.1));
```

$$1.665833531718508\ 10^{-4}$$

```
wxdraw2d(
 title="Approximation lineaire de sin par la tangente en 0",
grid=true,
xaxis=true,
yaxis=true,
 xrange=[0,0.2],
 yrange=[0,0.2],
color=black,
line_width=1,
key="sin(x)",
explicit(sin(x),x,0,0.2),
   key="T(x)",
   color=blue,
   explicit(T(x),x,0,0.2)
)
;
```



11 Exercice 11

```
kill(all);
```

done

```
f(x):=(1+x)^50;
```

$$f(x):=(1+x)^{50}$$

```
define(fprime(x),diff(f(x),x));
```

$$\mathrm{fprime}(x):=50\,(x+1)^{49}$$

```
T(x):=fprime(0)·(x−0)+f(0);
```

$$T(x):=\mathrm{fprime}(0)\,(x-0)+f(0)$$

```
T(0.05);
```

3.5

```
f(0.05);
```

11.46739978575368

L'approximation linéaire est donc peu pertinente, l'écart étant trop grand pour x=0.05

12 Exercice 12

```
relation:(x−2)^2/4+(y+3)^2/25=1;
```

$$\frac{(y+3)^2}{25}+\frac{(x-2)^2}{4}=1$$

```
depends(y,x);
```

$$[y(x)]$$

```
etap1:diff(relation,x);
```

$$\frac{2\,(y+3)\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)}{25}+\frac{x-2}{2}=0$$

```
etap2:etap1−(x−2)/2;
```

$$\frac{2\,(y+3)\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)}{25}=-\frac{x-2}{2}$$

```
etap3:etap2·25;
```

$$2\,(y+3)\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)=-\frac{25\,(x-2)}{2}$$

```
etap4:etap3/2;
```

$$(y+3)\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)=-\frac{25\,(x-2)}{4}$$

```
etap5:etap4/(y+3);
```

$$\frac{d}{d\,x}\,y=-\frac{25\,(x-2)}{4\,(y+3)}$$

On cherche l'expression de y+3 en fonction de x pour la remplacer dans l'expression :
Ceci impose de restreindre à une demi-ellipse

```
remp:solve(subst(Y,y+3,relation),Y);
```

$$\left[Y=-\frac{5\sqrt{4\,x-x^2}}{2},\,Y=\frac{5\sqrt{4\,x-x^2}}{2}\right]$$

```
valeur:rhs(remp[2]);
```

$$\frac{5\sqrt{4\,x-x^2}}{2}$$

```
etap6:subst(valeur,y+3,etap5);
```

$$\frac{d}{d\,x}\,y=-\frac{5\,(x-2)}{2\sqrt{4\,x-x^2}}$$

```
define(fprime(x),rhs(etap6));
```

$$\text{fprime}(x):=-\frac{5(x-2)}{2\sqrt{4x-x^2}}$$

```
etap5;
```

$$\frac{d}{dx}y=-\frac{25(x-2)}{4(y+3)}$$

Le texte demande en fait l'expression de la dérivée en fonction de x et y, on reprend donc pour répondre à la question posée.

```
define(differentielle(x,y),rhs(etap5));
```

$$\text{differentielle}(x,y):=-\frac{25(x-2)}{4(y+3)}$$

Points pour lesquels la tangente à l'ellipse à pour pente 1/2 :

```
pointscherches:solve([relation,differentielle(x,y)=1/2],[x,y]);
```

$$\left[\left[x=-\frac{\sqrt{26}-26}{13},y=\frac{25\sqrt{26}-78}{26}\right],\left[x=\frac{\sqrt{26}+26}{13},y=-\frac{25\sqrt{26}+78}{26}\right]\right]$$

```
x0:rhs(pointscherches[1][1]);y0:rhs(pointscherches[1][2]);
```

$$-\frac{\sqrt{26}-26}{13}$$

$$\frac{25\sqrt{26}-78}{26}$$

```
x1:rhs(pointscherches[2][1]);y1:rhs(pointscherches[2][2]);
```

$$\frac{\sqrt{26}+26}{13}$$

$$-\frac{25\sqrt{26}+78}{26}$$

```
T1(x):=1/2·(x−x0)+y0;T2(x):=1/2·(x−x1)+y1;
```

$$\text{T1}(x):=\frac{1}{2}(x-x0)+y0$$

$$\text{T2}(x):=\frac{1}{2}(x-x1)+y1$$

Points pour lesquels la tangente à l'ellipse à pour pente -2 :
(condition de perpendicularité pour deux droites, le produit des pentes fait -1)

```
pointscherches2:solve([relation,differentielle(x,y)=−2],[x,y]);
```

$$\left[\left[x=-\frac{8\sqrt{41}-82}{41},y=-\frac{25\sqrt{41}+123}{41}\right],\left[x=\frac{8\sqrt{41}+82}{41},y=\frac{25\sqrt{41}-123}{41}\right]\right]$$

```
x3:rhs(pointscherches2[1][1]);y3:rhs(pointscherches2[1][2]);
```

$$-\frac{8\sqrt{41}-82}{41}$$

$$-\frac{25\sqrt{41}+123}{41}$$

```
x4:rhs(pointscherches2[2][1]);y4:rhs(pointscherches2[2][2]);
```

$$\frac{8\sqrt{41}+82}{41}$$

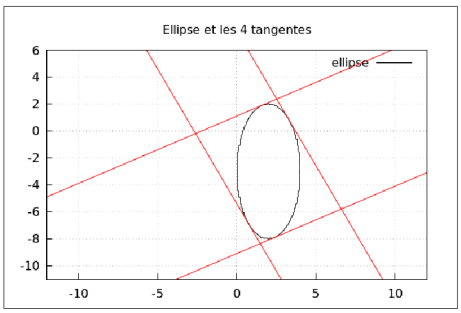
$$\frac{25\sqrt{41}-123}{41}$$

```
T3(x):=−2·(x−x3)+y3;T4(x):=−2·(x−x4)+y4;
```

$$\text{T3}(x):=(-2)(x-x3)+y3$$

$$\text{T4}(x):=(-2)(x-x4)+y4$$

```
wxdraw2d(
 title="Ellipse et les 4 tangentes",
grid=true,
xaxis=true,
yaxis=true,
 xrange=[−12,12],
 yrange=[−11,6],
dimensions=[600,600],
color=black,
line_width=1,
key="ellipse",
   implicit(relation,x,−10,10,y,−10,10),
   color=red,
   key="",
explicit(T1(x),x,−12,12),
explicit(T2(x),x,−12,12),
explicit(T3(x),x,−10,10),
explicit(T4(x),x,−10,10)
)
$
```



13 Exercice 13

```
kill(all);
```

done

```
diff(f(x)·g(x)·h(x)·i(x)·j(x),x);
```

$$f(x)g(x)h(x)i(x)\left(\frac{d}{dx}j(x)\right)+f(x)g(x)h(x)j(x)\left(\frac{d}{dx}i(x)\right)+f(x)g(x)i(x)j(x)\left(\frac{d}{dx}h(x)\right)+f(x)h(x)i(x)j(x)\left(\frac{d}{dx}g(x)\right)+g(x)h(x)i(x)j(x)\left(\frac{d}{dx}f(x)\right)$$

Somme des produits ou on remplace à chaque fois une des 5 fonctions par sa dérivée.

14 Exercice 14

```
x(t):= 2.35 · t^3 − 5.1 · t^2 + 4;
```

$$x(t):=2.35\,t^3-5.1\,t^2+4$$

```
vag(t1,t2):=(x(t2)−x(t1))/(t2−t1);
```

$$vag(t1,t2):=\frac{x(t2)-x(t1)}{t2-t1}$$

```
vag(2,3);
```

19.15

```
makelist(print("vitesse moyenne sur [2,",2.0+1/2^i,"]",vag(2,2+1/2^i)),i,0,19)$
```

vitesse moyenne sur [2, 3.0 *]* 19.15
vitesse moyenne sur [2, 2.5 *]* 12.8875
vitesse moyenne sur [2, 2.25 *]* 10.196875
vitesse moyenne sur [2, 2.125 *]* 8.961718750000017
vitesse moyenne sur [2, 2.0625 *]* 8.371679687499978
vitesse moyenne sur [2, 2.03125 *]* 8.083544921874932
vitesse moyenne sur [2, 2.015625 *]* 7.941198730468841
vitesse moyenne sur [2, 2.0078125 *]* 7.87045593261746
vitesse moyenne sur [2, 2.00390625 *]* 7.835192108153933
vitesse moyenne sur [2, 2.001953125 *]* 7.817587089537483
vitesse moyenne sur [2, 2.0009765625 *]* 7.808791303636099
vitesse moyenne sur [2, 2.00048828125 *]* 7.804395091538026
vitesse moyenne sur [2, 2.000244140625 *]* 7.802197405690094
vitesse moyenne sur [2, 2.0001220703125 *]* 7.801098667812766
vitesse moyenne sur [2, 2.00006103515625 *]* 7.800549325183965
vitesse moyenne sur [2, 2.000030517578125 *]* 7.800274660461582
vitesse moyenne sur [2, 2.000015258789062 *]* 7.80013732961379
vitesse moyenne sur [2, 2.000007629394531 *]* 7.800068664364517
vitesse moyenne sur [2, 2.000003814697265 *]* 7.800034332089126
vitesse moyenne sur [2, 2.000001907348633 *]* 7.800017166882753

La limite semble exister et valoir 7,8

```
define(vinst(t),diff(x(t),t));
```

$$\mathrm{vinst}(t):=7.050000000000001\,t^2-10.2\,t$$

```
vinst(2);
```

7.800000000000004