wxMaxima pour l'Analyse Volume I

Auteur : Zachary Hannan, Solano Community College

Exercices du Chapitre 5 et leur corrigé

Présentation

Le manuel wxMaxima for Calculus Volume I, dont l'auteur est Zachary Hannan, propose l'étude de nombreux domaines de l'analyse à l'aide du logiciel Maxima et de son interface graphique wxMaxima. A l'occasion de la traduction française de ce manuel, la correction des exercices de chaque chapitre est proposée. Ce document reprend les exercices du manuel et leur correction à l'aide de wxMaxima.

La dernière version de ce document, ainsi que les fichiers source pour wxMaxima, sont téléchargeables sur le site https://maxima-french-doc.fr/, à la rubrique Documentation.

Enoncé des exercices

1. À la manière de l'exemple 5.1.1, trouver et tracer les sommes de Riemann à gauche et à droite pour $n = 30$ de la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $[1, 3]$. Laquelle est une surestimation ? Laquelle est une sous-estimation ?
2. Utiliser une boucle « do » pour produire une suite de sommes des points milieux avec $n = 10$, $n = 20$, ..., $n = 100$ afin d'approcher l'aire délimitée par e^{-x^2} et l'axe des x sur l'intervalle $[-10, 10]$. Comparer le résultat avec celui obtenu en utilisant la fonction `integrate` (il faudra forcer une réponse numérique avec `float`).
3. A la manière de l'exemple 5.2.1, calculer $\displaystyle\int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x$ en appliquant `limit` à une somme de Riemann.
4. Définissez $f(x) = \sin x$ sur l'intervalle $[0, 2\pi]$. Tracez le graphe de $f(x)$ en coloriant les aires positives en rouge et les aires négatives en bleu. D'après le graphique, quelle valeur pensez-vous obtenir pour $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x) \, \mathrm{d}x$? Vérifiez à l'aide de la commande `integrate`.
5. Définissez une fonction d'aire avec un « point de départ » à $x = 0$ pour $\cos x$, puis utilisez cette fonction d'aire pour calculer l'aire délimitée sur l'intervalle $[1, 2]$. Vérifiez en calculant cette aire à l'aide d'une seule intégrale.
6. Définissez les fonctions d'aire $F(x)$ et $G(x)$ pour les deux fonctions $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = \frac{1}{x^2}$, chacune avec un point de départ à $x = 1$. Utilisez une boucle "do" pour produire une liste des aires sur les intervalles $x = [1, 10], [1, 100], \ldots, [1, 10^{10}]$ pour chaque fonction. D'après vos résultats, quelles sont les valeurs de $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2} \, \mathrm{d}x$?
7. Une symétrie peut souvent être utilisée pour simplifier le calcul d'une intégrale définie sur un intervalle symétrique par rapport à l'origine. Considérez les fonctions $f(x) = \cosh x$ et $g(x) = \sinh x$ sur l'intervalle $[-1, 1]$. Testez la parité de chaque fonction dans wxMaxima. Laquelle est paire ? Laquelle est impaire ? Représentez graphiquement $f(x)$ et $g(x)$ en coloriant les aires selon les signes. Voyez-vous comment simplifier $\displaystyle\int_{-1}^1 f(x) \, \mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_{-1}^1 g(x) \, \mathrm{d}x$? Calculez les intégrales en utilisant vos simplifications, puis vérifiez vos réponses en calculant directement les intégrales.
8. Pour calculer l'énergie potentielle totale stockée dans un ressort (pour un allongement de longueur L), nous devons calculer $W = \displaystyle\int_0^L F(x) \cdot \mathrm{d}x$, où $F(x)$ est la force appliquée au ressort pour l'allonger jusqu'à une longueur x (par rapport à sa longueur « naturelle »). Les données suivantes ont été obtenues

en étirant un ressort depuis sa longueur naturelle $x = 0$ jusqu'à une longueur finale de $L = 0{,}51$ m. Utilisez une approximation par la méthode des trapèzes pour calculer l'énergie totale stockée dans le ressort (les unités seront dans ce cas exprimées en joules). Réalisez un tracé des points des données expérimentales ainsi que des trapèzes correspondants.

```
x(m)........F(x) (N)

.05          10
.09         20
.14          30
.19          40
.27          50
.38          60
.44          70
.48         80
.51          90
```

Quelle est l'interprétation physique de la fonction d'aire $A(x) = \int_0^x F(t) \cdot \mathrm{d}t$?

9. Un graphique *vitesse-temps* montre la vitesse d'un objet (en m/s) en fonction du temps (en s). Supposons qu'une fonction vitesse soit donnée par $v(t) = 0,2 \cdot t^2$. Quelle est la vitesse de l'objet à $t = 1{,}5\,\mathrm{s}$? En supposant que l'objet ne puisse pas changer trop rapidement de vitesse, quelle distance parcourra-t-il environ dans les $0{,}05\,\mathrm{s}$ suivantes ? À quoi correspond géométriquement ce calcul sur le graphe de $v(t)$? Faites un graphique pour illustrer. Répétez ensuite cette procédure toutes les $0{,}05\,\mathrm{s}$ de $t = 1{,}5\,\mathrm{s}$ à $t = 3\,\mathrm{s}$. Trouvez l'aire totale de tous les rectangles et interprétez votre résultat. Enfin, vérifiez la réponse directement en utilisant `integrate`.

10. Une voiture est flashée par un radar toutes les 0,2 secondes, et les données de vitesse suivantes sont obtenues :

```
t(s)........v(m/s)
0.2         +35.0
0.4         +35.2
0.6         +35.0
0.8         +35.1
1.0         +34.9
1.2         +35.1
1.4         +34.5
1.6         +33.0
1.8         +31.2
2.0         +26.8
2.2          +22.5
2.4         +18.7
2.6         +15.0
2.8         +11.6
3.0         +7.5
3.2         +4.1
3.4         +1.3
3.6         0
3.8         0
4.0         0
```

Utilisez une approximation par des trapèzes pour calculer la distance totale parcourue par la voiture pendant ce processus. Elaborez un graphique avec tous les points des données du radar ainsi qu'avec les trapèzes ombrés. Décrivez ce qui s'est passé (physiquement) aux alentours de 1,2 seconde.

Corrigé des exercices

WX MAXIMA POUR L' ANALYSE , VOLUME I CORRECTION DES EXERCICES DU CHAPITRE 5 FICHIER : CORRECTION-CHAPITRE5. WXMX

1 Exercice1

(%i1) delx:(3−1)/30$

(%i2) x(i):=1+delx·i;

$$x(i) := 1 + \mathrm{delx}\, i \tag{\%o2}$$

(%i3) f(x):=1/x$

(%i4) float(sum(f(x(i−1))·delx,i,1,30));

$$1.1211635667667734 \tag{\%o4}$$

(%i5) float(sum(f(x(i))·delx,i,1,30));

$$1.076719122322329 \tag{\%o5}$$

Calcul de la valeur numérique de l'intégrale avec la fonction intégrée de Maxima
La fonction f étant décroissante, les rectangles à gauche surestiment la valeur,
ceux à droite sous-estiment la valeur.

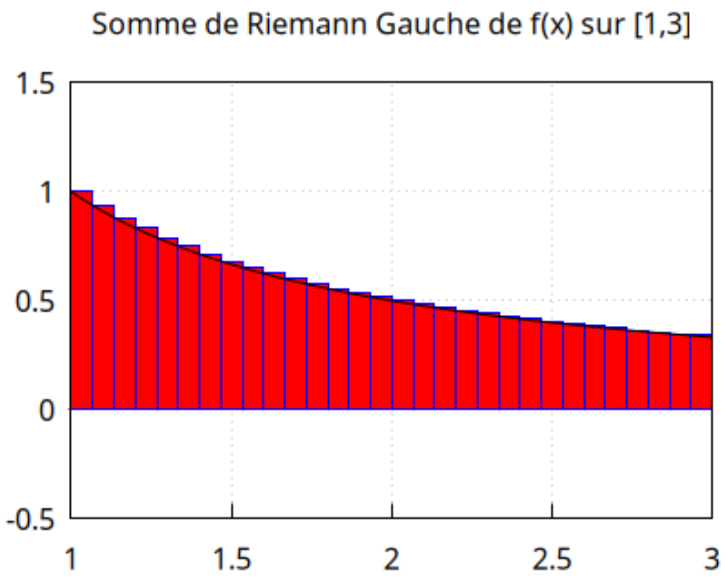
(%i6) quad_qags(1/x, x, 1, 3);

$$\left[1.0986122886681096\,,7.55551145979846710^{-14}\,,21\,,0\right] \tag{\%o6}$$

(%i7) RECTANGLES:makelist(rectangle([x(i−1),0],[x(i),f(x(i−1))]),i,1,30)$

(%i8)
```
wxdraw2d(
grid=true,
xrange=[1,3],
yrange=[−0.5,1.5],
title="Somme de Riemann Gauche de f(x) sur [1,3]",
fill_color=red,
border=true,
RECTANGLES,
color=black,
explicit(f(x),x,1,3)
);
```

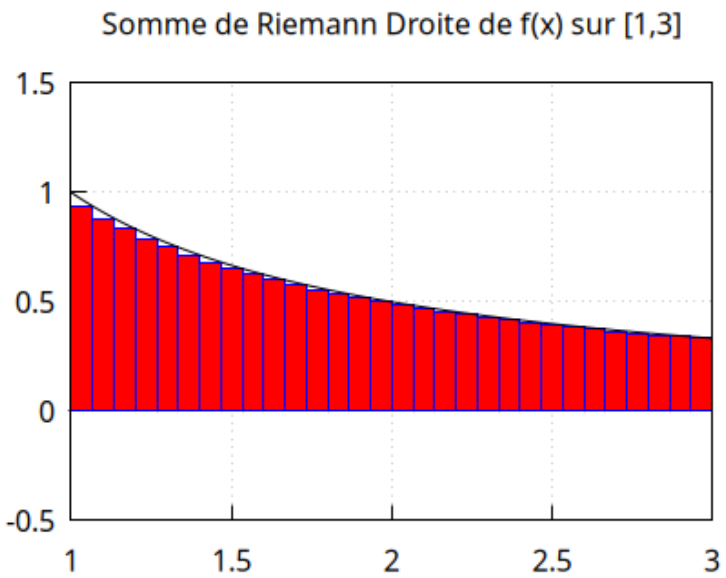
(%t8)



(%o8)

```
(%i9) RECTANGLES:makelist(rectangle([x(i−1),0],[x(i),f(x(i))]),i,1,30)$
(%i10) wxdraw2d(
grid=true,
xrange=[1,3],
yrange=[−0.5,1.5],
title="Somme de Riemann Droite de f(x) sur [1,3]",
fill_color=red,
border=true,
RECTANGLES,
color=black,
explicit(f(x),x,1,3)
);
```

(%t10)



(%o10)

2 Exercice 2

(%i11) kill(all);

$$\text{done} \tag{\%o0}$$

(%i1) f(x):=exp(−x^2);

$$f(x) := exp\left(-x^2\right) \tag{\%o1}$$

(%i2) delx(n):=(10−(−10))/n;

$$delx(n) := \frac{10 - -10}{n} \tag{\%o2}$$

(%i3) x(i):=−10+delx(n)·i;

$$x(i) := -10 + delx(n)i \tag{\%o3}$$

(%i4) xmid(i):=(x(i−1)+x(i))/2;

$$xmid(i) := \frac{x(i-1) + x(i)}{2} \tag{\%o4}$$

(%i5) ptmilieu(n):=float(sum(f(xmid(i))·delx(n),i,1,n));

$$ptmilieu(n) := float\left(\sum_{i=1}^{n} f\left(xmid(i)\right) delx(n)\right) \tag{\%o5}$$

(%i6) for n:10 thru 100 step 10 do print("n=",n,"estimation aire =",ptmilieu(n))$

$$//n = //10//estimationaire = //1.4720114039576677$$
$$//n = //20//estimationaire = //1.7722704969843799$$
$$//n = //30//estimationaire = //1.7724538501012552$$
$$//n = //40//estimationaire = //1.7724538509055159$$
$$//n = //50//estimationaire = //1.7724538509055159$$
$$//n = //60//estimationaire = //1.7724538509055159$$
$$//n = //70//estimationaire = //1.7724538509055159$$
$$//n = //80//estimationaire = //1.772453850905516$$
$$//n = //90//estimationaire = //1.7724538509055159$$

$$//n = //100 //estimationaire = //1.7724538509055163$$

(%i7) integrate(f(x),x,−10,10);

$$\sqrt{\pi}\, erf(10) \tag{\%o7}$$

(%i8) ev(%,numer);

$$1.7724538509055159 \tag{\%o8}$$

La convergence est assez rapide, car à partir d'un découpage avec 30, on est très proche du résultat

3 Exercice 3

(%i9) kill(all);

$$\text{done} \tag{\%o0}$$

(%i1) f(x):=x^2;

$$f(x) := x^2 \tag{\%o1}$$

(%i2) delx(n):=(1−0)/n$

(%i3) x(n,i):=i·delx(n)$

(%i4) ratprint:false$

(%i5) sum(f(x(n,i))·delx(n),i,1,n), simpsum;

$$\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3} \tag{\%o5}$$

(%i6) fullratsimp(%);

$$\frac{2n^2 + 3n + 1}{6n^2} \tag{\%o6}$$

(%i7) float(limit(%,n,inf));

$$0.3333333333333333 \tag{\%o7}$$

On vérifie en calculant directement l'intégrale

(%i8) integrate(f(x),x,0,1);

$$\frac{1}{3} \tag{\%o8}$$

4 Exercice 4

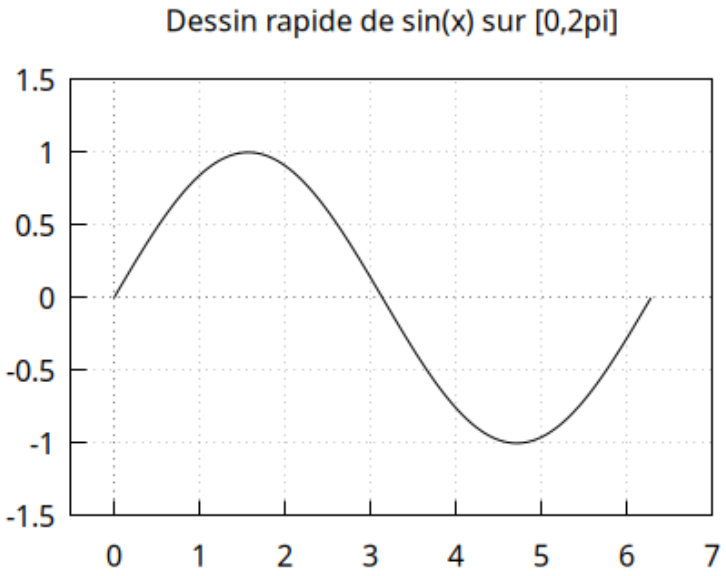
(%i9) f(x):=sin(x);

$$f(x) := \sin(x) \tag{\%o9}$$

Représentation rapide de la fonction sur [0,2pi].
Il y a une valeur unique (pi) qui annule la fonction sur cet intervalle

(%i10)
```
wxdraw2d(
title="Dessin rapide de sin(x) sur [0,2pi]",
grid=true,
xaxis=true,
yaxis=true,
xrange=[−0.5,7],
yrange=[−1.5,1.5],
color=black,
line_width=1,
key="",
explicit(sin(x),x,0,2·%pi)
)
;
```

(%t10)

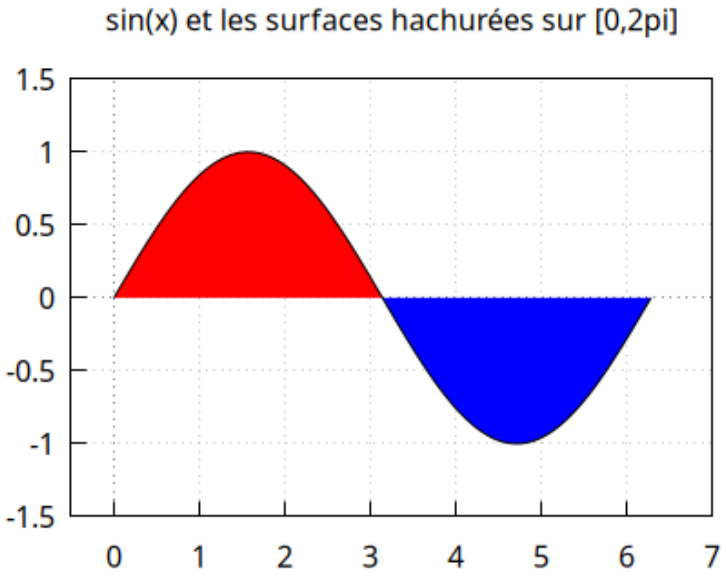


(%o10)

(%i11)
```
wxdraw2d(
grid=true,
xrange=[−0.5,7],
yrange=[−1.5,1.5],
xaxis=true,
yaxis=true,
title="sin(x) et les surfaces hachurées sur [0,2pi]",
color=black,
fill_color=red,
filled_func=f(x),
```

```
explicit(0,x,0,%pi),
filled_func=false,
explicit(f(x),x,0,%pi),
fill_color=blue,
filled_func=f(x),
explicit(0,x,%pi,2·%pi),
filled_func=false,
explicit(f(x),x,%pi,2·%pi)
);;;
```

(%t11)



(%o11)

Les aires positives et négatives sont égales (en valeur absolue).
L'intégrale devrait donc être nulle.

(%i12) integrate(sin(x),x,0,2·%pi);

$$0 \tag{\%o12}$$

5 Exercice 5

(%i13) Aire(x):=integrate(cos(t),t,0,x);

$$Aire(x) := \int_0^x \cos(t)\, dt \tag{\%o13}$$

(%i14) Aire(2)−Aire(1);

$$\sin(2) - \sin(1) \tag{\%o14}$$

(%i15) integrate(cos(t),t,1,2);

$$\sin(2) - \sin(1) \tag{\%o15}$$

(%i16) ev(%,numer);

$$0.0678264420177852 \tag{\%o16}$$

6 Exercice 6

(%i17) F(x):=integrate(1/t,t,1,x);

$$F(x) := \int_1^x \frac{1}{t}\, dt \tag{\%o17}$$

(%i18) G(x):=integrate(1/t^2,t,1,x);

$$G(x) := \int_1^x \frac{1}{t^2}\, dt \tag{\%o18}$$

(%i19) for i:1 thru 10 step 1 do print("F(10^",i,")=",float(F(10^i)),," et G(10^",i,")=",float(G(10^i)))$

$$//F(10\textasciicircum//1//) = //2.302585092994046//etG(10\textasciicircum//1//) = //0.9$$

$$//F(10\textasciicircum//2//) = //4.605170185988092//etG(10\textasciicircum//2//) = //0.99$$

$$//F(10\textasciicircum//3//) = //6.907755278982137//etG(10\textasciicircum//3//) = //0.999$$

$$//F(10\textasciicircum//4//) = //9.210340371976184//etG(10\textasciicircum//4//) = //0.9999$$

$$//F(10\textasciicircum//5//) = //11.512925464970229//etG(10\textasciicircum//5//) = //0.99999$$

$$//F(10\textasciicircum//6//) = //13.815510557964274//etG(10\textasciicircum//6//) = //0.999999$$

$$//F(10\textasciicircum//7//) = //16.11809565095832//etG(10\textasciicircum//7//) = //0.9999999$$

$$//F(10\textasciicircum//8//) = //18.420680743952367//etG(10\textasciicircum//8//) = //0.99999999$$

$$//F(10\textasciicircum//9//) = //20.72326583694641//etG(10\textasciicircum//9//) = //0.999999999$$

$$//F(10\textasciicircum//10//) = //23.025850929940457//etG(10\textasciicircum//10//) = //0.9999999999$$

F semble tendre vers +oo et G vers 1 lorsque x tend vers +oo

(%i20) assume(x>1);

$$[x > 1] \tag{\%o20}$$

(%i21) limit(F(x),x,inf);

$$\infty \tag{\%o21}$$

(%i22) limit(G(x),x,inf);

$$1 \tag{\%o22}$$

7 Exercice 7

(%i23) kill(all);

$$\text{done} \tag{\%o0}$$

(%i1) cosh(−x);

$$\cosh(x) \tag{\%o1}$$

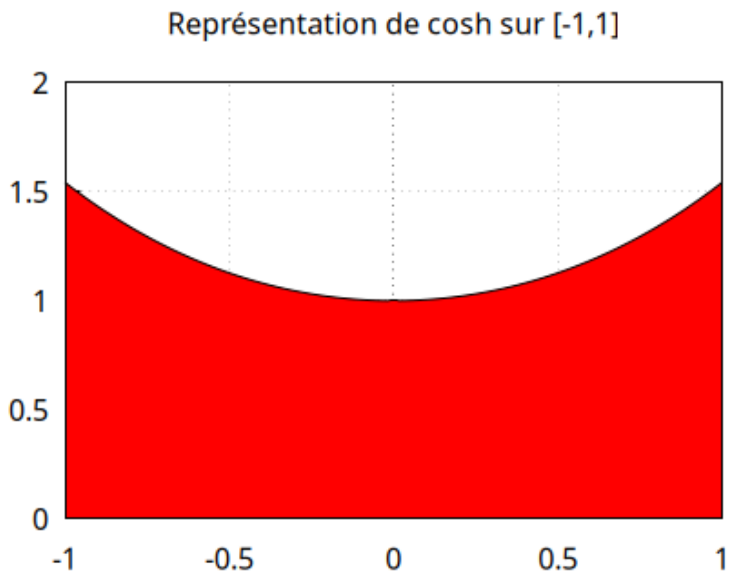
(%i2) sinh(−x);

$$-\sinh(x) \tag{\%o2}$$

La fonction cosh est donc paire, tandis que sinh est impaire.

(%i3)
```
wxdraw2d(
title="Représentation de cosh sur [-1,1]",
grid=true,
xaxis=true,
yaxis=true,
xrange=[−1,1],
yrange=[0,2],
color=black,
line_width=1,
key="",
fill_color=red,
filled_func=cosh(x),
explicit(0,x,−1,1),
  color=black,
  filled_func=false,
  explicit(cosh(x),x,−1,1)
);
```

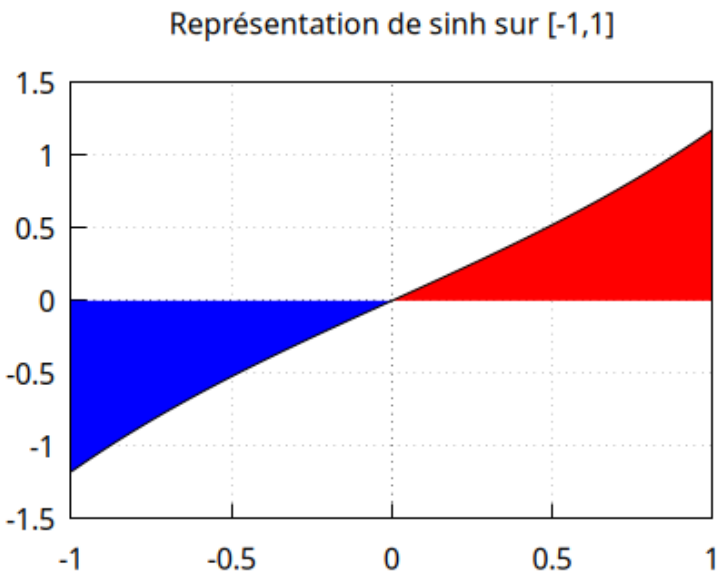
(%t3)



(%o3)

(%i4)
```
wxdraw2d(
title="Représentation de sinh sur [-1,1]",
grid=true,
xaxis=true,
yaxis=true,
xrange=[−1,1],
yrange=[−1.5,1.5
],
line_width=1,
key="",
fill_color=red,
filled_func=sinh(x),
explicit(0,x,0,1),
  fill_color=blue,
filled_func=sinh(x),
explicit(0,x,−1,0),
  color=black,
  filled_func=false,
  explicit(sinh(x),x,−1,1)
);
```

(%t4)



(%o4)

on en déduit pour l'intégrale de la fonction cosh

(%i5) 'integrate(cosh(x),x,−1,1)=2·'integrate(cosh(x),x,0,1);

$$\int_{-1}^{1} \cosh(x)\, dx = 2 \int_{0}^{1} \cosh(x)\, dx \qquad (\%o5)$$

(%i6) 2·integrate(cosh(x),x,0,1);

$$2 \sinh(1) \qquad (\%o6)$$

(%i7) ev(%,numer);

$$2.3504023872876028 \qquad (\%o7)$$

(%i8) integrate(cosh(x),x,−1,1);

$$2 \sinh(1) \qquad (\%o8)$$

(%i9) 'integrate(sinh(x),x,0,1)=integrate(sinh(x),x,0,1);

$$\int_{0}^{1} \sinh(x)\, dx = \cosh(1) - 1 \qquad (\%o9)$$

(%i10) 'integrate(sinh(x),x,−1,0)=integrate(sinh(x),x,−1,0);

$$\int_{-1}^{0} \sinh(x)\,dx = 1 - \cosh(1) \qquad (\%o10)$$

(%i11) integrate(sinh(x),x,−1,1);

$$0 \qquad (\%o11)$$

8 Exercice 8

(%i14) X : [0.05, 0.09, 0.14, 0.19, 0.27, 0.38, 0.44, 0.48, 0.51]$
Y : [10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90]$
L : makelist([X[i], Y[i]], i, 1, length(X))$

(%i15) TRAPEZOID(i):=0.5·(Y[i]+Y[i+1])·(X[i+1]−X[i])$

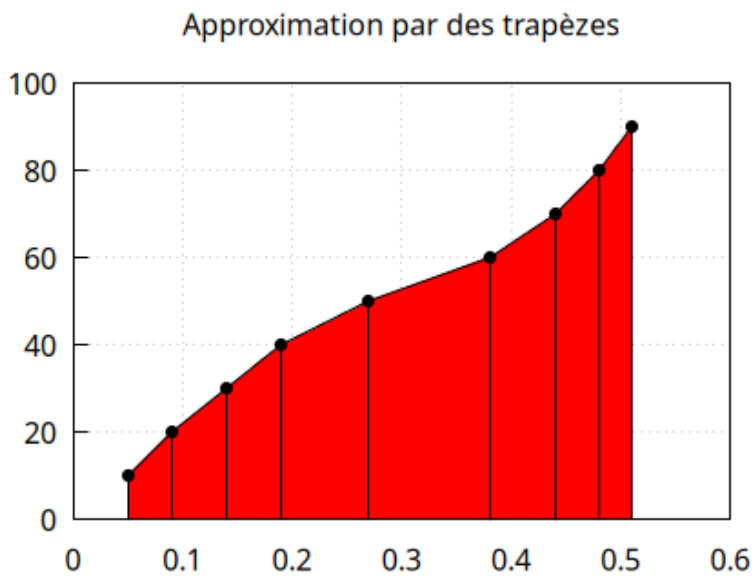
(%i16) sum(TRAPEZOID(i),i,1,length(X)−1);

$$22.700000000000003 \qquad (\%o16)$$

(%i17) TRAPEZOIDS:makelist(polygon([[X[i],0],[X[i+1],0],[X[i+1],Y[i+1]],
[X[i],Y[i]]]),i,1,8)$

(%i18) wxdraw2d(
grid=true,
xaxis=true,
yaxis=true,
xrange=[0,0.6],
yrange=[0,100],
title="Approximation par des trapèzes",
fill_color=red,
color=black,
border=true,
TRAPEZOIDS,
point_type=7,
points(L)
);

(%t18)



(%o18)

L'intégrale représente l'énergie potientielle nécessaire pour étirer le ressort jusqu'à la position x

9 Exercice 9

(%i19) kill(all);

$$\text{done} \tag{\%o0}$$

(%i1) v(t):=0.2·t^2;

$$v(t) := 0.2t^2 \tag{\%o1}$$

(%i2) v(1.5);

$$0.45 \tag{\%o2}$$

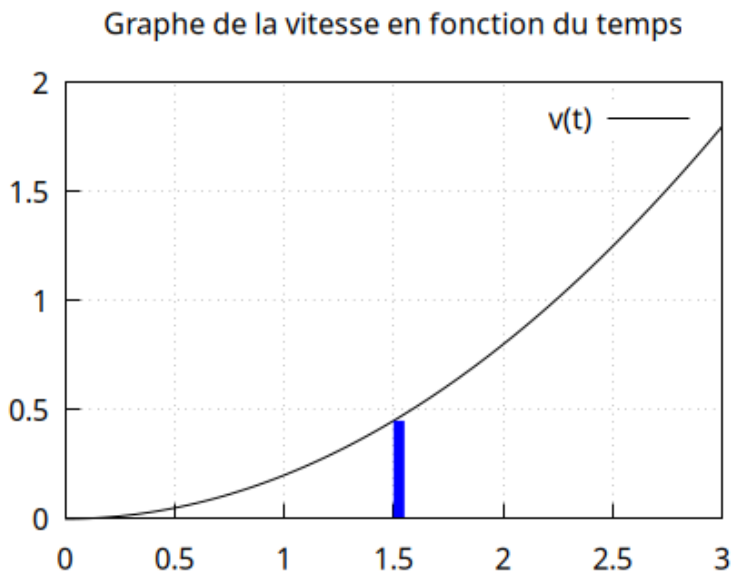
(%i3) d1:v(1.5)·0.05;

$$0.022500000000000003 \tag{d1}$$

On peut interpréter le résultat précédent comme l'aire du rectangle de hauteur v(1.5)
et de largeur 0.05.

(%i4)
```
wxdraw2d(
title="Graphe de la vitesse en fonction du temps",
grid=true,
xaxis=true,
yaxis=true,
xrange=[0,3],
yrange=[0,2],
color=black,
line_width=1,
key="v(t)",
explicit(0.2·x^2,x,0,3),
  key="",
  fill_color=blue,
  filled_func=v(1.5),
explicit(0,x,1.5,1.55)
)
;
```

(%t4)



(%o4)

(%i5) sum(v(1.5+i·0.05)·0.05,i,0,29);

$$1.5413750000000004 \quad (\%o5)$$

(%i6) makelist(1.5+i·0.05,i,0,29);

(%o6)

(%i7) integrate(v(t),t,1.5,3);

$$1.5750000000000002 \quad (\%o7)$$

On vérifie bien que la somme des aires des rectangles est un minorant de l'aire entre la courbe représentative de v(t), l'axe des abscisses sur l'intervalle [1.5,3].

10 Exercice 10

(%i8) kill(all);

done (%o0)

(%i3) X : [0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2.0, 2.2, 2.4, 2.6, 2.8, 3.0, 3.2, 3.4, 3.6, 3.8, 4.0]$
Y : [35.0, 35.2, 35.0, 35.1, 34.9, 35.1, 34.5, 33.0, 31.2, 26.8, 22.5, 18.7, 15.0, 11.6, 7.5, 4.1, 1.3, 0, 0, 0]$
L : makelist([X[i], Y[i]], i, 1, length(X))$

(%i4) TRAPEZOID(i):=0.5·(Y[i]+Y[i+1])·(X[i+1]−X[i])$

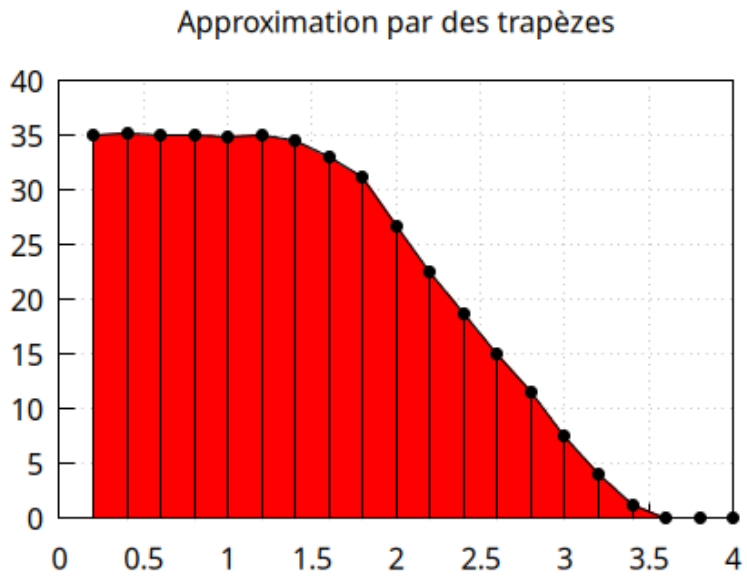
(%i5) sum(TRAPEZOID(i),i,1,length(X)−1);

79.8 (%o5)

(%i6) TRAPEZOIDS:makelist(polygon([[X[i],0],[X[i+1],0],[X[i+1],Y[i+1]],[X[i],Y[i]]]),i,1,19)$

(%i7)
```
wxdraw2d(
grid=true,
xaxis=true,
yaxis=true,
xrange=[0,4],
yrange=[0,40],
title="Approximation par des trapèzes",
fill_color=red,
color=black,
border=true,
TRAPEZOIDS,
point_type=7,
points(L)
);
```

(%t7)



(%o7)

La voiture a commencé à décelérer jusqu'à s'arrêter à partir de 1.2.

Created with wxMaxima.