BACCALAURÉAT 2025 AMÉRIQUE DU NORD J1 S SPÉCIALITÉ
CORRECTION DE L'EXERCICE 3

La correction de cet exercice montre l'utilisation du package `geomana3d.mac` qui fournit des commandes permettant la résolution par les étudiants des exercices de géométrie analytique en 3D des programmes du lycée.

On charge le paquetage :

```
-->     load( geomana3d.mac )$
```

La commande info_ package_ geom3d() donne les informations sur ce package.

Enoncé de l'exercice (Source : Annales de l'APMEP)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$.

On considère la droite (d) dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 3-2t \\ y & = & -1 \\ z & = & 2-6t \end{array}\right. \quad \text{, où } t \in \mathbb{R}$$

On considère également les points suivants :

- $\mathrm{A}(3\,;\,-3\,;\,-2)$
- $\mathrm{B}(5\,;\,-4\,;\,-1)$
- C le point de la droite (d) d'abscisse 2
- H le projeté orthogonal du point B sur le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x+3z-7=0$

Affirmation 1

La droite (d) et l'axe des ordonnées sont deux droites non coplanaires.

Affirmation 2

Le plan passant par A et orthogonal à la droite (d) a pour équation cartésienne :

$$x+3z+3=0$$

Affirmation 3

Une mesure, exprimée en radian, de l'angle géométrique $\widehat{\mathrm{BAC}}$ est $\dfrac{\pi}{6}$.

Affirmation 4

La distance BH est égale à $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

Résolution avec wxMaxima et le package geomana3d.mac

On définit les objets de l'exercice :

(% i38) eqd :[x=3-2*t,y=-1,z=2-6*t,t] ;A :[3,-3,-2] ;B :[5,-4,-1] ;eq :x+3*z-7=0 ;
(eqd) $[x=3-2t, y=-1, z=2-6t, t]$

(A) $[3,-3,-2]$

(B) $[5,-4,-1]$

(eq) $3z+x-7=0$

1 Affirmation 1

On cherche un vecteur directeur de la droite (d) :

(% i5) u :vecteur_directeur_droite(eqd)$

Les coefficients devant le paramètre de la droite donnent par lecture un vecteur directeur.
Un vecteur directeur de la droite a pour coordonnées $[-2,0,-6]$ Un vecteur directeur de l'axe des ordonnées est j :[0,1,0]. On vérifie la colinéarité de ces deux vecteurs :

(% i6) is_colineaire(u,[0,1,0])$

Pour savoir si deux vecteurs sont colinéaires, on cherche si leurs coordonnées sont proportionnelles.
Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires. On en conclut que ces deux droites ne sont ni parallèles ni confondues. Il reste à chercher si ces deux droites sont sécantes, après avoir généré les équations de l'axe des ordonnées (passe par O et dirigée par [0,1,0]).

(% i7) eqaxe :equation_droite([0,0,0],[0,1,0],k)$

Equations paramétriques de la droite : $[x=0, y=k, z=0, k]$

(% i8) intersection_droite_droite(eqd,eqaxe)$

Pour savoir si deux droites de l'espace sont sécantes, on essaye de résoudre le système
obtenu en égalant les x, y et z tirés des équations paramétriques
avec comme inconnus les deux paramètres. Si le sytème a une solution alors il existe
un point d'interserction que l'on obtient en remplaçant les paramètres par leurs valeurs.
Si le système n'a pas de solution, alors les deux droites ne sont pas sécantes.

Il n'existe pas de valeur des paramètres pour lesquels le système a des solutions
donc les deux droites ne sont pas sécantes. On conclut que la droite (d) et l'axe des ordonnées ne sont pas coplanaires.

2 Affirmation 2

Ce plan passe par A et a pour vecteur normal un vecteur directeur de (d), soit u.

(% i9) eqp :equation_plan2(u,A) ;

Un plan a pour équation de manière générale ax+by+cz+d=0

Les coordonnées du vecteur normal donnent respectivement les coefficients de x, y et z
On trouve d en résolvant l'équation obtenue en remplaçant x, y et z par les coordonnées du point.
Valeur calculée de la constante d : -6
Une équation du plan défini par ce vecteur normal et ce point est donc : $-(6z)-2x-6=0$

(eqp) $-(6z)-2x-6=0$ Vérifions que cette équation se simplifie et est bien égale à l'équation proposée :

(% i10) compare_equation_plan(eqp,x+3*z+3=0);

Pour savoir si ces deux équations correspondent à un même plan,
on cherche si les deux équations sont proportionnnelles (coefficients proportionnels)
Plan 1 normalisé : $3z+x+3$
Plan 2 normalisé : $3z+x+3$

$(\%o10)$ Les deux équations correspondent au même plan (équations proportionnelles).

3 Affirmation 3

La formule cos(BAC)=vecteur(AB)xvecteur(AC)/(AB.AC) permet de retrouver l'angle cherché.On commence par trouver C, point de (d) d'abscisse 2.

Pour cela, on trouve la valeur de t pour laquelle x est égal à 2, puis on calcule le point correspondant :

(% i11) tC :rhs(solve(2=3-2*t,t)[1]);
(tC) $\frac{1}{2}$

(% i12) C :point_droite(eqd,tC)$

Le point de la droite ainsi défini a pour coordonnées : $[2,-1,-1]$

(% i15) A ;B ;C ;
$(\%o13)$ $[3,-3,-2]$

$(\%o14)$ $[5,-4,-1]$

$(\%o15)$ $[2,-1,-1]$

(% i18) ps :produit_scalaire(B-A,C-A)$

Si u(x,y,z) et v(x',y',z') alors le produit scalaire est égal à xx'+yy'+zz'
Le produit scalaire des deux vecteurs est égal à -3

(% i24) normev(B-A) ;normev(C-A) ;
$(\%o23)$ $\sqrt{6}$

$(\%o24)$ $\sqrt{6}$

(% i26) cos :ps/(normev(B-A)*normev(C-A)) ;
(cos) $-\left(\frac{1}{2}\right)$

(% i27) solve(cos(x)=cos,x) ;
solve : using arc-trig functions to get a solution. Some solutions will be lost.

$(\%o27)$ $[x=\frac{2\pi}{3}]$ On en conclut que l'angle n'est pas égal à pi/6.

4 Affirmation 4

Calculons les coordonnées de H

(% i41) B ;eq ;
(%o40) $[5,-4,-1]$

(%o41) $3z+x-7=0$

(% i43) H :proj_ortho(B,eq) ;

On trouve un système d'équations paramétriques de la droite passant par le point dirigée par un vecteur
normal au plan puis on cherche le point d'intersection de cette droite avec le plan.
Equation de la droite perpendiculaire au plan passant par le point : $[x=t+5, y=-4, z=3t-1, t]$
Coordonnées du point d'intersection : $\left[\frac{11}{2}, -4, \frac{1}{2}\right]$

(H) $\left[\frac{11}{2}, -4, \frac{1}{2}\right]$

(% i46) l :norme(B,H)$

Longueur du segment : $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ On termine en exprimant le résultat de manière plus classique pour conclure

(% i64) rootscontract(num(l)*denom(l))/(denom(l)ˆ 2) ;
(%o64) $\frac{\sqrt{10}}{2}$ On peut aussi calculer la différence des deux expressions :

(% i74) radcan(l-sqrt(10)/2) ;
(%o74) 0