BACCALAURÉAT 2025 AMÉRIQUE DU NORD J2 S SPÉCIALITÉ
CORRECTION DE L'EXERCICE 3

La correction de cet exercice montre l'utilisation du package `geomana3d.mac` qui fournit des commandes permettant la résolution par les étudiants des exercices de géométrie analytique en 3D des programmes du lycée.

On charge le paquetage :

```
-->    load( geomana3d.mac )$
```

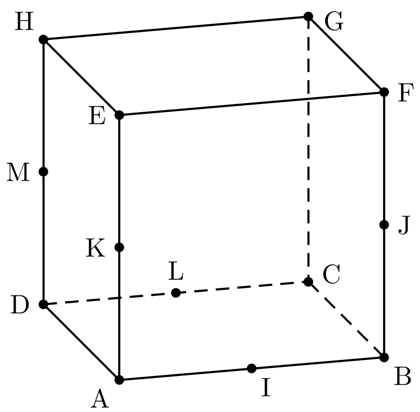
La commande info_ package_ geom3d() donne les informations sur ce package.

Enoncé de l'exercice (Source : Annales de l'APMEP)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

PARTIE A

ABCDEFGH est un cube d'arête de longueur 1. Les points I, J, K, L et M sont les milieux respectifs des arêtes [AB], [BF], [AE], [CD] et [DH].



Affirmation 1 : « $\overrightarrow{JH} = 2\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{DM} - \overrightarrow{CB}$ »

Affirmation 2 : « Le triplet de vecteurs $\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AH},\ \overrightarrow{AG}\right)$ est une base de l'espace. »

Affirmation 3 : « $\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{LM} = -\dfrac{1}{4}$. »

PARTIE B

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère :

- le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $2x - y + 3z + 6 = 0$
- les points A(2 ; 0 ; −1) et B(5 ; −3 ; 7)

Affirmation 4 : « Le plan $\mathscr{P}$ et la droite (AB) sont parallèles. »

Affirmation 5 : « Le plan $\mathscr{P}'$ parallèle à $\mathscr{P}$ passant par B a pour équation cartésienne »

$$-2x + y - 3z + 34 = 0$$

Affirmation 6 : « La distance du point A au plan $\mathscr{P}$ est égale à $\dfrac{\sqrt{14}}{2}$. »

On note (d) la droite de représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -12+2k \\ y & = & 6 \\ z & = & 3-\ \ 5k \end{array}\right. ,\text{où } k \in \mathbb{R}$$

Affirmation 7 : « Les droites (AB) et (d) ne sont pas coplanaires. »

Résolution avec wxMaxima et le package geomana3d.mac

1 Affirmation 1

On définit les différents points de la figure, en prenant comme repère (A,vec(AB),vec(AD),vec(AE)) :

(% i9) A :[0,0,0]\$B :[1,0,0]\$C :[1,1,0]\$D :[0,1,0]\$E :[0,0,0]\$F :[1,0,1]\$G :[1,1,1]\$H :[0,1,1]\$

On calcule les milieux dont on a besoin :

(% i13) J :(B+F)/2 ;I :(A+B)/2 ;M :(D+H)/2 ;L :(C+D)/2 ;

$(J)\quad \left[1,0,\dfrac{1}{2}\right]$

$(I)\quad \left[\frac{1}{2},0,0\right]$

$(M)\quad \left[0,1,\frac{1}{2}\right]$

$(L)\quad \left[\frac{1}{2},1,0\right]$

(% i14) print(coordonnées du vecteur JH ,H-J)\$

coordonnées du vecteur JH $\left[-1,1,\dfrac{1}{2}\right]$

(% i15) print(vecteur(2BI) ,2*(I-B), vecteur(DM) ,M-D, vecteur(CB) ,B-C)\$

vecteur(2BI) $[-1,0,0]$ vecteur(DM) $\left[0,0,\dfrac{1}{2}\right]$ vecteur(CB) $[0,-1,0]$

(% i16) print(vecteur(2BI+DM-CB) ,2*(I-B)+(M-D)-(B-C))\$

vecteur(2BI+DM-CB) $\left[-1,1,\dfrac{1}{2}\right]$

L'affirmation est donc vérifiée.

2 Affirmation 2

On cherche si ces vecteurs sont linéairement indépendants, à savoir s'il existe x et y tels que-vec(AG)=x.vec(AD)+y.vec(AH)

(% i17) u :G-A ;
(u) $[1,1,1]$

(% i18) v :x*(B-A)+y*(H-A) ;
(v) $[x,y,y]$

(% i19) linsolve([u[1]=v[1],u[2]=v[2],u[3]=v[3]],[x,y]) ;
solve : dependent equations eliminated : (3)

$(\%o19)$ $[x=1,y=1]$

On en conclut que ces vecteurs ne forment pas une base de l'espace car linéairement dépendants.

3 Affirmation 3

(% i20) produit_scalaire(B-I,M-L)$

Si u(x,y,z) et v(x',y',z') alors le produit scalaire est égal à xx'+yy'+zz'
Le produit scalaire des deux vecteurs est égal à $-\left(\frac{1}{4}\right)$

L'affirmation est donc bien vérifiée

(% i1) kill(all)$load(geomana3d)$

La commande info_ package_ geom3d() donne les informations de ce package - Version 2.0

(% i4) P :2*x-y+3*z+6=0$A :[2,0,-1]$B :[5,-3,7]$

4 Affirmation 4

Méthode 1 : on calcule une équation (paramétrique) de la droite AB et on cherche l'intersectionde cette droite avec le plan :

(% i5) dAB :equation_droite(A,B-A,t)$

Equations paramétriques de la droite : $[x=3t+2,y=-(3t),z=8t-1,t]$

(% i6) intersection_plan_droite(dAB,P)$

On résout le système d'équations formé par les équations de la droite et celle du plan.
Coordonnées du point d'intersection : $\left[x=\frac{15}{11},y=\frac{7}{11},z=-\left(\frac{89}{33}\right)\right]$

Valeur du paramètre $t=-\left(\frac{7}{33}\right)$ La droite et le plan se coupent, donc ces objets ne sont pas parallèles et l'affirmation est fausse.

Méthode 2 : on regarde si vecteur(AB) est perpendiculaire à un vecteur normal du plan :

(% i7) u :normal(P)$

Les coordonnées d'un vecteur normal sont les coefficients de x, y et z dans l'équation du plan.

Un vecteur normal au plan est $[2,-1,3]$

(% i8) produit_scalaire(u,B-A)$

Si u(x,y,z) et v(x',y',z') alors le produit scalaire est égal à xx'+yy'+zz'
Le produit scalaire des deux vecteurs est égal à 33 Ce vecteur normal au plan n'est pas orthogonal au vecteur directeur de la droite (AB) doncla droite n'est pas parallèle au plan.

5 Affirmation 5

Le plan P' passe par B et a pour vecteur normal u, qui est normal à P puisque ces plans sont parallèles.

(% i9) ePB :equation_plan2(u,B)$

Un plan a pour équation de manière générale ax+by+cz+d=0
Les coordonnées du vecteur normal donnent respectivement les coefficients de x, y et z
On trouve d en résolvant l'équation obtenue en remplaçant x, y et z par les coordonnées du point.
Valeur calculée de la constante d : -34
Une équation du plan défini par ce vecteur normal et ce point est donc : $3z-y+2x-34=0$

(% i10) compare_equation_plan(ePB, -2*x+y-3*z+34=0) ;

Pour savoir si ces deux équations correspondent à un même plan,
on cherche si les deux équations sont proportionnnelles (coefficients proportionnels)
Plan 1 normalisé : $\frac{3z-y+2x-34}{2}$
Plan 2 normalisé : $\frac{3z-y+2x-34}{2}$

(%o10) Les deux équations correspondent au même plan (équations proportionnelles).

L'affirmation est donc bien vraie.

6 Affirmation 6

On trouve le point H, projeté orthogonal de A sur P, puis on calcule AH :

(% i11) H :proj_ortho(A,P)$

On trouve un système d'équations paramétriques de la droite passant par le point dirigée par un vecteur normal au plan puis on cherche le point d'intersection de cette droite avec le plan.
Equation de la droite perpendiculaire au plan passant par le point : $[x=2t+2, y=-t, z=3t-1, t]$
Coordonnées du point d'intersection : $\left[1, \frac{1}{2}, -\left(\frac{5}{2}\right)\right]$

(% i12) l :norme(A,H)$

Longueur du segment : $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$

(% i13) rootscontract(num(l)*denom(l))/(denom(l)^ 2) ;

(%o13) $\frac{\sqrt{14}}{2}$

L'affirmation est donc bien vérifiée.

7 Affirmation 7

Définissons la droite (d) :

(% i14) dd :[x=-12+2*k,y=6,z=3-5*k,k] ;

(dd) $[x=2k-12, y=6, z=3-5k, k]$

(% i15) dAB ;

(%o15) $[x=3t+2, y=-(3t), z=8t-1, t]$

On cherche l'intersection de ces deux droites :

(% i16) intersection_droite_droite(dd,dAB)$

Pour savoir si deux droites de l'espace sont sécantes, on essaye de résoudre le système
obtenu en égalant les x, y et z tirés des équations paramétriques
avec comme inconnus les deux paramètres. Si le sytème a une solution alors il existe
un point d'interserction que l'on obtient en remplaçant les paramètres par leurs valeurs.
Si le système n'a pas de solution, alors les deux droites ne sont pas sécantes.
———— $solve : dependentequationseliminated : (3)$
Les deux droites sont sécantes au point : $[-4, 6, -17]$
Valeurs des paramètres : $k = 4$ et $t = -2$

Le fait que ces deux droites soient sécantes prouvent qu'elles sont coplanaires et que l'affirmation est fausse.