BACCALAURÉAT 2025 AMÉRIQUE DU NORD S SPÉCIALITÉ SECOURS – CORRECTION DE L'EXERCICE 2

La correction de cet exercice montre l'utilisation du package `geomana3d.mac` qui fournit des commandes permettant la résolution par les étudiants des exercices de géométrie analytique en 3D des programmes du lycée.

On charge le paquetage :

−> load(geomana3d.mac)$

La commande info_ package_ geom3d() donne les informations sur ce package.

Enoncé de l'exercice (Source : Annales de l'APMEP)

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse puis justifier la réponse donnée. Toute réponse non argumentée ne sera pas prise en compte.

$\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$ est un repère de l'espace.

On considère la droite D qui a pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 3-\ \ t\\ y &=& -2+3t\\ z &=& 1+4t\end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$ et le plan P qui a pour équation cartésienne : $2x-3y+z-6=0$.

1. **Affirmation :** La droite D′, qui a pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x=2+2t\\ y=4-6t\\ z=9-8t\end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$, est parallèle à la droite D.
2. On admet que les points A(−2 ; 3 ; 1), B(1 ; 3 ; −4) et C(6 ; 3 ; 9) ne sont pas alignés.

   Affirmation : La droite D est orthogonale au plan défini par les trois points A, B et C.
3. **Affirmation :** La droite D est sécante avec la droite Δ qui a pour représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -4+2t'\\ y &=& 1-3t'\\ z &=& 2+\ \ t'\end{array}\right.$ $t' \in \mathbb{R}$
4. **Affirmation :** Le point F(−3 ; −3 ; 3) est le projeté orthogonal du point E(−5 ; 0 ; 2) sur le plan P.
5. **Affirmation :** Il existe exactement une valeur du paramètre réel a telle que le plan P' d'équation $-3x+y-a^2z+3=0$ soit parallèle à la droite D.

Résolution avec wxMaxima et le package geomana3d.mac

On commence par définir les objets de l'exercice :

(% i11) eqD :[x=3-t,y=-2+3*t,z=1+4*t,t] ;eqP :2*x-3*y+z-6=0 ;eqDp :[x=2+2*k,y=4-6*k,z=9-8*k,k] ;
A :[-2,3,2] ;B :[1,3,-4] ;C :[6,3,9] ;eqDelta :[x=-4+2*s,y=1-3*s,z=2+s,s] ;F :[-3,-3,3] ;E :[-5,0,2] ;
eqX :-3*x+y-a^ 2*z+3=0 ;

(*eqD*) $[x=3-t, y=3t-2, z=4t+1, t]$

(eqP) $z-3y+2x-6=0$

$(eqDp)$ $[x=2k+2, y=4-6k, z=9-8k, k]$

(A) $[-2,3,2]$

(B) $[1,3,-4]$

(C) $[6,3,9]$

$(eqDelta)$ $[x=2s-4, y=1-3s, z=s+2, s]$

(F) $[-3,-3,3]$

(E) $[-5,0,2]$

(eqX) $-(a^2 z)+y-3x+3=0$

1 Affirmation 1

On extrait un vecteur directeur pour chacune des droites puis on cherche s'ils sont colinéaires :

(% i12) uD :vecteur_directeur_droite(eqD)$

Les coefficients devant le paramètre de la droite donnent par lecture un vecteur directeur.
Un vecteur directeur de la droite a pour coordonnées $[-1,3,4]$

(% i13) uDp :vecteur_directeur_droite(eqDp)$

Les coefficients devant le paramètre de la droite donnent par lecture un vecteur directeur.
Un vecteur directeur de la droite a pour coordonnées $[2,-6,-8]$

(% i14) is_colineaire(uD,uDp)$

Pour savoir si deux vecteurs sont colinéaires, on cherche si leurs coordonnées sont proportionnelles.
Ces deux vecteurs sont colinéaires.
On a en effet : $[-1,3,4] = -\left(\frac{1}{2}\right)$ x $[2,-6,-8]$

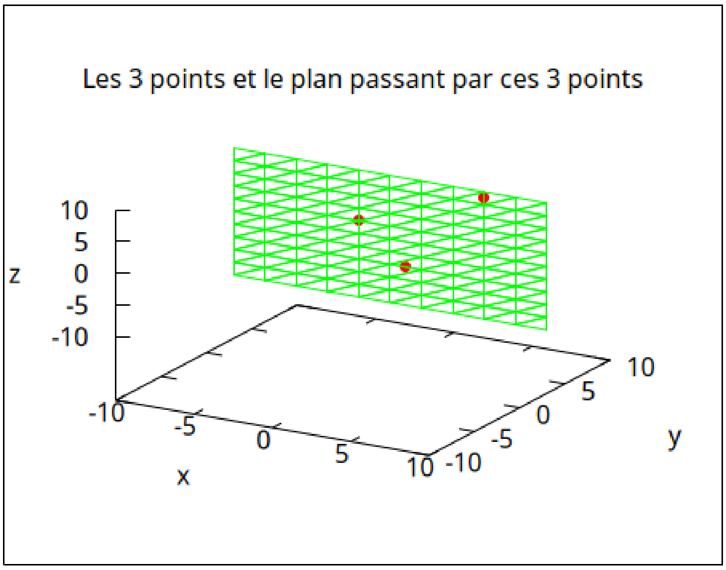
On en déduit que ces deux droites sont bien parallèles, donc l'affirmation est vraie.

2 Affirmation 2

En complément, on vérifie que les 3 points A, B et C forment bien un plan :

(% i15) is_plan(A,B,C);

Les 3 points $[-2,3,2]$, $[1,3,-4]$ et $[6,3,9]$ forment bien un plan.
En effet, les trois points ne sont pas alignés. Pour le démontrer, on peut définir
deux vecteurs directeurs à partir des 3 points et vérifier qu'ils ne sont pas colinéaires.
Vecteur normal au plan : $[0,-69,0]$
Equation du plan : $207-69y=0$



2.1 Méthode 1

On cherche si uD, vecteur directeur de D, est orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan, par exemple AB et AC :

(% i17) produit_scalaire(uD,B-A)$produit_scalaire(uD, C-A)$

Si u(x,y,z) et v(x',y',z') alors le produit scalaire est égal à xx'+yy'+zz'
Le produit scalaire des deux vecteurs est égal à -27
Si u(x,y,z) et v(x',y',z') alors le produit scalaire est égal à xx'+yy'+zz'
Le produit scalaire des deux vecteurs est égal à 20 donc l'affirmation est fausse, D n'est pas perpendiculaire au plan ABC.

2.2 Méthode 2

On trouve un vecteur normal au plan ABC et l'on regarde s'il est colinéaire à uD :

(% i18) eqABC :equation_plan(A,B,C)$

Les 3 points $[-2,3,2]$, $[1,3,-4]$ et $[6,3,9]$ forment bien un plan.
Un vecteur normal au plan est : $[0,-69,0]$
Une équation du plan est : $207-69y=0$

(% i19) n :normal(eqABC)$

Les coordonnées d'un vecteur normal sont les coefficients de x, y et z dans l'équation du plan.

Un vecteur normal au plan est $[0,-69,0]$

(% i20) is_colineaire(n,uD)$

Pour savoir si deux vecteurs sont colinéaires, on cherche si leurs coordonnées sont proportionnelles.
Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

2.3 Méthode 3 (hors programme)

On utilise le produit vectoriel des vecteurs AB et AC qui donne un vecteur normal au plan ABC et on termine avec la fin de la méthode 2 (colinéarité avec uD)

(% i21) pv :produit_vectoriel(B-A,C-A) ;
(pv) $[0,-69,0]$

(% i22) is_colineaire(pv,uD)$

Pour savoir si deux vecteurs sont colinéaires, on cherche si leurs coordonnées sont proportionnelles.
Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

3 Affirmation 3

On cherche si les deux droites D et Delta sont sécantes, en résolvant le système constitué par leurs équations

(% i23) intersection_droite_droite(eqD,eqDelta)$

Pour savoir si deux droites de l'espace sont sécantes, on essaye de résoudre le système obtenu en égalant les x, y et z tirés des équations paramétriques
avec comme inconnus les deux paramètres. Si le sytème a une solution alors il existe un point d'interserction que l'on obtient en remplaçant les paramètres par leurs valeurs.
Si le système n'a pas de solution, alors les deux droites ne sont pas sécantes.

Il n'existe pas de valeur des paramètres pour lesquels le système a des solutions
donc les deux droites ne sont pas sécantes.

L'affirmation est donc fausse, les deux droites n'ayant aucun point d'intersection

4 Affirmation 4

4.1 Méthode 1

On utilise la fonction du package geomana3d qui calcule le projeté orthogonal d'un point sur un plan

(% i24) proj_ortho(E,eqP)$

On trouve un système d'équations paramétriques de la droite passant par le point dirigée par un vecteur normal au plan puis on cherche le point d'intersection de cette droite avec le plan.
Equation de la droite perpendiculaire au plan passant par le point : $[x=2t-5, y=-(3t), z=t+2, t]$
Coordonnées du point d'intersection : $[-3,-3,3]$

On reconnait le point F, ce qui prouve que l'affirmation est vraie.

4.2 Méthode 2

On montre que F appartient au plan P et que la droite (EF) est perpendiculaire à ce plan en vérifiant que les vecteurs EF et un vecteur normal au plan sont colinéaires.

(% i25) is_point_plan_eq(F,eqP)$

On teste si les coordonnées du point vérifient l'équation du plan.

$2 \text{ x } -3 + -3 \text{ x } -3 + 1 \text{ x } 3 + -6 = 0$
donc le point appartient au plan.

(% i26) is_colineaire(normal(eqP),F-E)$

Les coordonnées d'un vecteur normal sont les coefficients de x, y et z dans l'équation du plan.
Un vecteur normal au plan est $[2, -3, 1]$
Pour savoir si deux vecteurs sont colinéaires, on cherche si leurs coordonnées sont proportionnelles.
Ces deux vecteurs sont colinéaires.
On a en effet : $[2, -3, 1] = 1 \text{ x } [2, -3, 1]$

5 Affirmation 5

On cherche pour quelles valeurs du paramètre a (s'il existe) un vecteur directeur de la droite D (soit uD) est orthogonal à un vecteur normal de P' (équation eqX), qui est une condition pour leur parallélisme.

(% i27) uD;
(%o27) $[-1, 3, 4]$

(% i28) eqX;
(%o28) $-\left(a^2 z\right) + y - 3x + 3 = 0$

(% i29) nX :normal(eqX)$

Les coordonnées d'un vecteur normal sont les coefficients de x, y et z dans l'équation du plan.

Un vecteur normal au plan est $\left[-3, 1, -a^2\right]$

(% i30) psX :produit_scalaire(uD,nX)$

Si u(x,y,z) et v(x',y',z') alors le produit scalaire est égal à xx'+yy'+zz'
Le produit scalaire des deux vecteurs est égal à $6 - 4a^2$

(% i31) solve(psX=0,a);
(%o31) $\left[a = -\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right), a = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right]$

Il existe donc deux valeurs de a pour lesquelles la droite D est parallèle au plan P', ce qui prouveque l'affirmation est fausse.