BACCALAURÉAT 2025 AMÉRIQUE DU SUD S SPÉCIALITÉ SECOURS – CORRECTION DE L'EXERCICE 2

La correction de cet exercice montre l'utilisation du package `geomana3d.mac` qui fournit des commandes permettant la résolution par les étudiants des exercices de géométrie analytique en 3D des programmes du lycée.

On charge le paquetage :

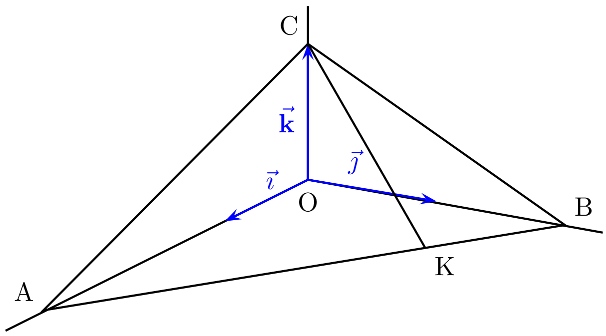
```
-->     load( geomana3d.mac )$
```

La commande info_ package_ geom3d() donne les informations sur ce package.

Enoncé de l'exercice (Source : Annales de l'APMEP)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$. On considère les points

$$\mathrm{A}\left(2\sqrt{3}\,;\,0\,;\,0\right),\quad \mathrm{B}(0\,;2\,;0),\quad \mathrm{C}(0\,;0\,;1)\quad \text{et}\quad \mathrm{K}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,;\,\frac{3}{2}\,;\,0\right).$$



1. Justifier qu'une représentation paramétrique de la droite (CK) est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \frac{\sqrt{3}}{2}t \\ y & = & \frac{3}{2}t \\ z & = & 1-t \end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R})$$

2. Soit $\mathrm{M}(t)$ un point de la droite (CK) paramétrée par un réel t.
Établir que $\mathrm{OM}(t) = \sqrt{4t^2-2t+1}$.

3. Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \mathrm{OM}(t)$.

   a. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

   b. En déduire la valeur de t pour laquelle f atteint son minimum.

4. En déduire que le point $\mathrm{H}\left(\frac{\sqrt{3}}{8}\,;\,\frac{3}{8}\,;\,\frac{3}{4}\right)$ est le projeté orthogonal du point O sur la droite (CK).

5. Démontrer, à l'aide de l'outil produit scalaire, que le point H est l'orthocentre (intersection des hauteurs d'un triangle) du triangle ABC.
6. a. Démontrer que la droite (OH) est orthogonale au plan (ABC).
   b. En déduire une équation du plan (ABC).
7. Calculer, en unité d'aire, l'aire du triangle ABC.

Résolution avec wxMaxima et le package geomana3d.mac

Définissons les points de l'espace

(% i6) A :[2*sqrt(3),0,0] ;B :[0,2,0] ;C :[0,0,1] ;K :[sqrt(3)/2,3/2,0] ;O :[0,0,0] ;

(A) $\left[2\sqrt{3},0,0\right]$

(B) $[0,2,0]$

(C) $[0,0,1]$

(K) $\left[\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},0\right]$

(O) $[0,0,0]$

1 Question 1

La droite passe par C et est dirigée par le vecteur CK (dont les coordonnées se calculent par K-C)

(% i7) eqCK :equation_droite(C,K-C,t)$

Equations paramétriques de la droite : $\left[x=\frac{\sqrt{3}t}{2},y=\frac{3t}{2},z=1-t,t\right]$

2 Question 2

On définit le point M puis on calcule la longueur OM par la macro norme

(% i8) M :point_droite(eqCK,t)$

Le point de la droite ainsi défini a pour coordonnées : $\left[\frac{\sqrt{3}t}{2},\frac{3t}{2},1-t\right]$

(% i9) OM :norme(O,M)$

Longueur du segment : $\sqrt{3t^2+(1-t)^2}$

(% i10) OM :expand(OM) ;

(OM) $\sqrt{4t^2-2t+1}$

3 Question 3

On définit la fonction puis on en fait l'étude demandée :

(% i11) define(f(t),OM);

(%o11) $f(t):=\sqrt{4t^2-2t+1}$ Calcul de la dérivée de f :

(% i12) fp(t) :=diff(f(t),t);

(%o12) $fp(t):=\frac{d}{dt}f(t)$

(% i13) fp(t);

(%o13) $\frac{8t-2}{2\sqrt{4t^2-2t+1}}$

Le signe de la dérivée de f est celui de 8t-2

(% i14) g(t) :=num(fp(t));

(%o14) $g(t):=num\left(fp(t)\right)$

(% i15) g(t);

(%o15) $8t-2$

(% i16) load(solve_rat_ineq)$

(% i17) solve_rat_ineq(g(t)>0);

(%o17) $\left[\left[t>\frac{1}{4}\right]\right]$

(% i18) solve_rat_ineq(g(t)<0);

(%o18) $\left[\left[t<\frac{1}{4}\right]\right]$

La fonction dérivée de f est négative pour t<1/4 et positive pour t>1/4.La fonction f est donc décroissante sur]-oo,1/4] et croissante sur [1/4,+oo[Elle atteint donc son minimum pour t=1/4.

4 Question 4

La plus petite distance OM correspond à la distance entre O et son projeté sur (CK) par définition.

(% i19) H :subst(1/4,t,M);

(H) $\left[\frac{\sqrt{3}}{8},\frac{3}{8},\frac{3}{4}\right]$

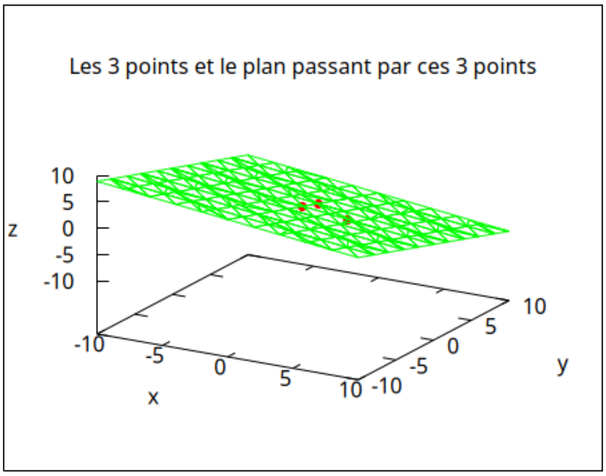
Il s'agit du point H, que l'on trouve en remplaçant t par la valeur correspondant au minimum.

5 Question 5

On peut vérifier que les 3 points A,B et C forment bien un plan

(% i20) is_plan(A,B,C)$

Les 3 points $\left[2\sqrt{3},0,0\right]$, $[0,2,0]$ et $[0,0,1]$ forment bien un plan.
En effet, les trois points ne sont pas alignés. Pour le démontrer, on peut définir
deux vecteurs directeurs à partir des 3 points et vérifier qu'ils ne sont pas colinéaires.
Vecteur normal au plan : $\left[2,2\sqrt{3},4\sqrt{3}\right]$
Equation du plan : $4\sqrt{3}z+2\sqrt{3}y+2x-4\sqrt{3}=0$



Vérifions que H appartient au plan ABC :

(% i21) is_point_plan_pts(H,A,B,C)$

On calcule une équation du plan défini par les 3 points puis
on teste si les coordonnées du point vérifient l'équation du plan.
Les 3 points $\left[2\sqrt{3},0,0\right]$, $[0,2,0]$ et $[0,0,1]$ forment bien un plan.
Un vecteur normal au plan est : $\left[2,2\sqrt{3},4\sqrt{3}\right]$
Une équation du plan est : $4\sqrt{3}z+2\sqrt{3}y+2x-4\sqrt{3}=0$
Coordonnées du point à tester : $\left[\frac{\sqrt{3}}{8},\frac{3}{8},\frac{3}{4}\right]$ $2 \text{ x } \frac{\sqrt{3}}{8} + 2\sqrt{3} \text{ x } \frac{3}{8} + 4\sqrt{3} \text{ x } \frac{3}{4} + -\left(4\sqrt{3}\right) = 0$
Le point appartient au plan.
Testons si (AH) est perpendiculaire à (BC) par le produit scalaire :

(% i22) produit_scalaire(H-A,C-B)$

Si u(x,y,z) et v(x',y',z') alors le produit scalaire est égal à xx'+yy'+zz'
Le produit scalaire des deux vecteurs est égal à 0
Testons si (BH) est perpendiculaire à (AC) par le produit scalaire

(% i23) produit_scalaire(H-B,C-A)$

Si u(x,y,z) et v(x',y',z') alors le produit scalaire est égal à xx'+yy'+zz'
Le produit scalaire des deux vecteurs est égal à 0
H, intersection de 2 des hauteurs est bien l'orthocentre.On peut vérifier que (CH) est perpendiculaire à (AB)

(% i24) produit_scalaire(H-C,B-A)$

Si u(x,y,z) et v(x',y',z') alors le produit scalaire est égal à xx'+yy'+zz'

Le produit scalaire des deux vecteurs est égal à 0

6 Question 6

On montre que le vecteur OH est orthogonal aux vecteurs AB et AC

(% i25) produit_scalaire(H,B-A)$

Si u(x,y,z) et v(x',y',z') alors le produit scalaire est égal à xx'+yy'+zz'
Le produit scalaire des deux vecteurs est égal à 0

(% i26) produit_scalaire(H,C-A)$

Si u(x,y,z) et v(x',y',z') alors le produit scalaire est égal à xx'+yy'+zz'
Le produit scalaire des deux vecteurs est égal à 0
Le plan ABC passe par A et a pour vecteur normal le vecteur OH :

(% i27) eqABC :equation_plan2(H,A)$

Un plan a pour équation de manière générale ax+by+cz+d=0
Les coordonnées du vecteur normal donnent respectivement les coefficients de x, y et z
On trouve d en résolvant l'équation obtenue en remplaçant x, y et z par les coordonnées du point.
Valeur calculée de la constante d : $-\left(\frac{3}{4}\right)$
Une équation du plan défini par ce vecteur normal et ce point est donc : $\frac{3z}{4}+\frac{3y}{8}+\frac{\sqrt{3}x}{8}-\frac{3}{4}=0$

(% i28) expand(eqABC*8);
(%o28) $6z+3y+\sqrt{3}x-6=0$

7 Question 7

(CK) étant une hauteur du triangle, l'aire est égale à 1/2*CK*AB

(% i29) aire :1/2*norme2(C,K)*norme2(A,B);
($aire$) 4