BACCALAURÉAT 2025 ASIE J1 S SPÉCIALITÉ
CORRECTION DE L'EXERCICE 2

La correction de cet exercice montre l'utilisation du package `geomana3d.mac` qui fournit des commandes permettant la résolution par les étudiants des exercices de géométrie analytique en 3D des programmes du lycée.

On charge le paquetage :

```
-->     load( geomana3d.mac )$
```

La commande info_ package_ geom3d() donne les informations sur ce package.

Enoncé de l'exercice (Source : Annales de l'APMEP)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O} ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

On considère :

- α un réel quelconque ;
- les points A(1 ; 1 ; 0), B(2 ; 1 ; 0) et C(α ; 3 ; α) ;
- (d) la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = \quad 2t \\ z = \quad -t \end{array}\right. ,\quad t \in \mathbb{R}$$

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse, puis justifier la réponse donnée. Une réponse non argumentée ne sera pas prise en compte.

Affirmation 1 : Pour toutes les valeurs de α, les points A, B et C définissent un plan et un vecteur normal à ce plan est $\vec{\jmath}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

Affirmation 2 : Il existe exactement une valeur de α telle que les droites (AC) et (d) soient parallèles.

Affirmation 3 : Une mesure de l'angle $\widehat{\text{OAB}}$ est 135°.

Affirmation 4 : Le projeté orthogonal du point A sur la droite (d) est le point H(1 ; 2 ; 2).

Affirmation 5 : La sphère de centre O et de rayon 1 rencontre la droite (d) en deux points distincts.

On rappelle que la sphère de centre Ω et de rayon r est l'ensemble des points de l'espace situés à une distance r de Ω.

Résolution avec wxMaxima et le package geomana3d.mac

On commence par définir les objets de l'espace à utiliser :

```
(% i8)  A :[1,1,0] ;B :[2,1,0] ;C :[a,3,a] ;eqd :[x=1+t,y=2*t,z=-t,t] ;j :[0,1,0] ;O :[0,0,0] ;H :[1,2,2] ;
```

$(A)\quad [1,1,0]$

$(B)\quad [2,1,0]$

(C) $[a,3,a]$

(eqd) $[x=t+1,y=2t,z=-t,t]$

(j) $[0,1,0]$

(O) $[0,0,0]$

(H) $[1,2,2]$

1 Affirmation 1

1.1 Méthode 1 (hors programme)

On calcule le produit vectoriel des vecteur AB et AC, sachant que ce produit vectoriel s'annule si et seulement les deux vecteurs sont colinéaires.

(% i9) produit_vectoriel(B-A,C-A);
(%o9) $[0,-a,2]$

Ce vecteur n'est jamais nul (dernière coordonnées non nulle) donc ces AB et AC sont indépendants et forment un plan.

1.2 Méthode 2

On cherche si les vecteurs AB et AC sont colinéaires en cherchant un coefficient de proportionnalité sur leurs coordonnées :

(% i11) B-A;C-A;
(%o10) $[1,0,0]$

(%o11) $[a-1,2,a]$

(% i12) is_colineaire(B-A,C-A)$

Pour savoir si deux vecteurs sont colinéaires, on cherche si leurs coordonnées sont proportionnelles.
Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

On teste si le vecteur j est orthogonal aux vecteurs AB et AC qui génèrent le plan

(% i13) produit_scalaire(j,B-A)$

Si u(x,y,z) et v(x',y',z') alors le produit scalaire est égal à xx'+yy'+zz'
Le produit scalaire des deux vecteurs est égal à 0

(% i14) produit_scalaire(j,C-A)$

Si u(x,y,z) et v(x',y',z') alors le produit scalaire est égal à xx'+yy'+zz'
Le produit scalaire des deux vecteurs est égal à 2

Conclusion : les vecteurs forment bien un plan quelque soit la valeur de a, mais le vecteur j n'est pas un vecteur normal de ce plan.

2 Affirmation 2

On extrait un vecteur directeur u de la droite d et l'on cherche s'il existe une valeur de a pour laquelle les coordonnées de u et du vecteur AC sont proportionnelles

(% i15) u :vecteur_directeur_droite(eqd)$

Les coefficients devant le paramètre de la droite donnent par lecture un vecteur directeur.
Un vecteur directeur de la droite a pour coordonnées $[1,2,-1]$

(% i16) C-A ;
$(\%o16)$ $[a-1,2,a]$

(% i17) solve(C-A=k*u,[k,a]) ;
$(\%o17)$ []

Il n'existe pas de valeurs de k et de a pour lesquelles AC soit proportionnel à u, donc l'affirmation est fausse.

3 Affirmation 3

La formule cos(OAB)=(vec(AO)xvec(AB))/(AOxAB) permet de trouver l'angle cherché

(% i18) val :produit_scalaire(O-A,B-A)/(normev(O-A)*normev(B-A)) ;

Si u(x,y,z) et v(x',y',z') alors le produit scalaire est égal à xx'+yy'+zz'
Le produit scalaire des deux vecteurs est égal à -1

(val) $-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

(% i19) ang :solve(cos(x)=val,x) ;
$solve: using arc-trig functions to get a solution. Some solutions will be lost.$

(ang) $\left[x=\frac{3\pi}{4}\right]$

(% i20) ang/%pi*180 ;
$(\%o20)$ $\left[\frac{180x}{\pi}=135\right]$

On retrouve bien la valeur de 135 degrés en convertissant les radians en degrés. L'affirmation est donc vraie.

4 Affirmation 4

On vérifie que H appartient à la droite d et que le vecteur AH est orthogonal à u, vecteur directeur de d.

(% i21) is_point_droite(H,eqd)$

On cherche s'il existe une valeur du paramètre pour lequel les équations paramétriques donnent

les coordonnées du point, en résolvant le système linéaire correspondant.
Il n'existe pas de valeur du paramètre vérifiant les 3 équations, donc le point n'appartient pas à la droite.

Le point H n'étant pas sur d, on en conclut que l'affirmation est fausse.

5 Affirmation 5

On va générer le point Mt0 de la droite (d) de paramètre t0, calculer la longueur OMt0 et chercher pour quelle valeur de t0 cette longueur est égale à 1, rayon de la sphère :

(% i22) Mt0 :point_droite(eqd,t0)$

Le point de la droite ainsi défini a pour coordonnées : $[\mathrm{t0}+1, 2\mathrm{t0}, -\mathrm{t0}]$

(% i23) r0 :norme(O,Mt0)$

Longueur du segment : $\sqrt{(\mathrm{t0}+1)^2+5\mathrm{t0}^2}$

(% i24) solve(r0=1,t0);

(%o24) $\left[\mathrm{t0}=-\left(\frac{1}{3}\right), \mathrm{t0}=0\right]$

On trouve 2 valeurs du paramètre, donc 2 points de la droite vérifiant ces conditions, ce qui prouve que l'affirmation 5 est bien vérifiée.

6 Représentation graphique

(% i25)
```
wxdraw3d(
xrange=[-1,1],yrange=[-1,1],zrange=[-1,1],
surface_hide=false,nticks=80,adapt_depth=4,proportional_axes = xyz,
color=green,
implicit(1=x**2+y**2+z**2,x,-2,2,y,-2,2,z,-2,2),
color=black,
parametric(t+1,2*t,-t,t,-15,15)
)$
```