Baccalauréat 2025 Asie Journée 2 S spécialité
Correction de l'exercice 3

La correction de cet exercice montre l'utilisation du package `geomana3d.mac` qui fournit des commandes permettant la résolution par les étudiants des exercices de géométrie analytique en 3D des programmes du lycée.

On charge le paquetage :

```
-->    load( geomana3d.mac )$
```

La commande info_ package_ geom3d() donne les informations sur ce package.

Enoncé de l'exercice (Source : Annales de l'APMEP)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath}\,,\ \vec{k}\right)$.

On considère :

- les points C(3 ; 0 ; 0), D(0 ; 2 ; 0), H(−6 ; 2 ; 2) et $\mathrm{J}\left(\dfrac{-54}{13}\ ;\ \dfrac{62}{13}\ ;\ 0\right)$;
- le plan P d'équation cartésienne $2x+3y+6z-6=0$;
- le plan P' d'équation cartésienne $x-2y+3z-3=0$;
- la droite (d) dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x=-8+\frac{1}{3}t \\ y=-1+\frac{1}{2}t \\ z=-4+t \end{cases} \quad , \quad t\in\mathbb{R}$

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse, puis justifier la réponse donnée. Une réponse non argumentée ne sera pas prise en compte.

Affirmation 1 : La droite (d) est orthogonale au plan P et coupe ce plan en H.

Affirmation 2 : La mesure en degré de l'angle $\widehat{\mathrm{DCH}}$, arrondie à 10^{-1}, est 17,3°.

Affirmation 3 : Les plans P et P' sont sécants et leur intersection est la droite Δ dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x &=& 3-3t \\ y &=& 0 \\ z &=& \quad\ t \end{cases} \quad , \quad t\in\mathbb{R}$.

Affirmation 4 : Le point J est le projeté orthogonal du point H sur la droite (CD).

Résolution avec wxMaxima et le package geomana3d.mac

On définit les objets de l'espace dont nous aurons besoin :

```
(%i5)  C :[3,0,0] ;D :[0,2,0] ;H :[-6,2,2] ;J :[-54/13,62/13,0] ;
```

$(C)\quad [3,0,0]$

$(D)\quad [0,2,0]$

$(H)\quad [-6,2,2]$

$(J)\quad \left[-\left(\frac{54}{13}\right),\frac{62}{13},0\right]$

(% i8) eqP :2*x+3*y+6*z-6=0 ;eqPp :x-2*y+3*z-3=0 ;eqd :[x=-8+1/3*t,y=-1+1/2*t,z=-4+t,t] ;

$(eqP)\quad 6z+3y+2x-6=0$

$(eqPp)\quad 3z-2y+x-3=0$

$(eqd)\quad \left[x=\frac{t}{3}-8, y=\frac{t}{2}-1, z=t-4, t\right]$

1 Affirmation 1

On trouve un vecteur normal à P, un vecteur directeur de (d), et l'on étudie la colinéarité des ces 2 vecteurs

(% i9) nP :normal(eqP)$

Les coordonnées d'un vecteur normal sont les coefficients de x, y et z dans l'équation du plan.

Un vecteur normal au plan est $[2,3,6]$

(% i10) u :vecteur_directeur_droite(eqd)$

Les coefficients devant le paramètre de la droite donnent par lecture un vecteur directeur.
Un vecteur directeur de la droite a pour coordonnées $\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2},1\right]$

(% i11) is_colineaire(nP,u)$

Pour savoir si deux vecteurs sont colinéaires, on cherche si leurs coordonnées sont proportionnelles.
Ces deux vecteurs sont colinéaires.
On a en effet : $[2,3,6]$ = 6 x $\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2},1\right]$ On teste si H appartient à la droite (d) :

(% i12) is_point_droite(H,eqd)$

On cherche s'il existe une valeur du paramètre pour lequel les équations paramétriques donnent

les coordonnées du point, en résolvant le système linéaire correspondant.

solve : dependent equations eliminated : (3 2)
Le système admet une solution pour $t = 6$
donc le point $[-6,2,2]$ appartient à la droite. On teste si H appartien au plan P :

(% i13) is_point_plan_eq(H,eqP)$

On teste si les coordonnées du point vérifient l'équation du plan.

2 x $-6 + 3$ x $2 + 6$ x $2 + -6 = 0$
donc le point appartient au plan. Donc l'affirmation 1 est vraie.

2 Affirmation 2

La formule cos(DCH)=(vec(CH).vec(CD)/(CHxCD) permet de trouver le cosinus de l'angle puis l'angle

(% i14) val :produit_scalaire(H-C,D-C)/(normev(D-C)*normev(H-C)) ;

Si u(x,y,z) et v(x',y',z') alors le produit scalaire est égal à xx'+yy'+zz'
Le produit scalaire des deux vecteurs est égal à 31

$(val)\quad \frac{31}{\sqrt{13}\sqrt{89}}$

(% i15) ang :float(solve(cos(x)=val,x));
$solve: using arc-trig functions to get a solution. Some solutions will be lost.$

$(ang)\quad [x=0.4241944079037667]$ On extrait la valeur en radians puis on convertit en degrés

(% i16) angd :rhs(ang[1]);
$(angd)\quad 0.4241944079037667$

(% i17) float(angd/%pi*180);
$(\%o17)\quad 24.30454926593672$5

L'angle vaut environ 24 degrés, donc l'affirmation est fausse

3 Affirmation 3

On résout le système d'équations constitué des équations des plans, avec comme inconnues x, y et z

(% i18) solve([eqP,eqPp],[x,y,z]);
$(\%o18)\quad [[x=3-3\%r1, y=0, z=\%r1]]$

On obtient bien une équation de la droite proposée, donc l'affirmation est vraie.

4 Affirmation 4

On cherche si J appartient à la droite (CD) et si (JH) est perpendiculaire à (CD.)

(% i19) eq2 :equation_droite(C,D-C,k)$

Equations paramétriques de la droite : $[x=3-3k, y=2k, z=0, k]$

Cette commande donne les équations de (CD) (droite passant par C dirigée par le vecteur CD)

(% i20) is_point_droite(J,eq2)$

On cherche s'il existe une valeur du paramètre pour lequel les équations paramétriques donnent

les coordonnées du point, en résolvant le système linéaire correspondant.

$solve: dependent equations eliminated: (32)$

Le système admet une solution pour $k = \frac{31}{13}$

donc le point $\left[-\left(\frac{54}{13}\right), \frac{62}{13}, 0\right]$ appartient à la droite.

On a bien vérifié que J appartient à la droite (CD). Regardons l'orthogonalité :

(% i21) produit_scalaire(H-J,D-C)$

Si u(x,y,z) et v(x',y',z') alors le produit scalaire est égal à xx'+yy'+zz'
Le produit scalaire des deux vecteurs est égal à 0 Les vecteurs JH et CD sont orthogonaux, donc J est bien le projeté orthogonal et l'affirmation est vraie.