BACCALAURÉAT 2025 ASIE SEPTEMBRE S SPÉCIALITÉ
CORRECTION DE L'EXERCICE 3

La correction de cet exercice montre l'utilisation du package `geomana3d.mac` qui fournit des commandes permettant la résolution par les étudiants des exercices de géométrie analytique en 3D des programmes du lycée.

On charge le paquetage :

```
-->    load( geomana3d.mac )$
```

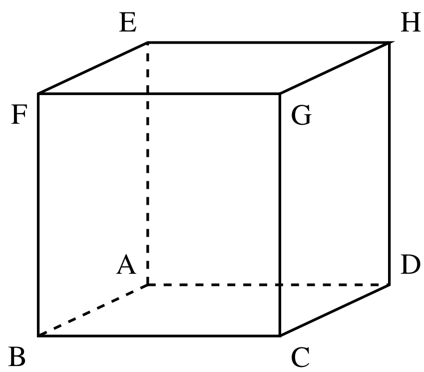
La commande info_ package_ geom3d() donne les informations sur ce package.

Enoncé de l'exercice (Source : Annales de l'APMEP)

« *Dans un triangle non équilatéral, la droite d'Euler est la droite qui passe par les trois points suivants* :

- *le centre du cercle circonscrit à ce triangle (cercle passant par les trois sommets de ce triangle).*
- *le centre de gravité de ce triangle situé à l'intersection des médianes de ce triangle.*
- *l'orthocentre de ce triangle situé à l'intersection des hauteurs de ce triangle* ».

Le but de l'exercice est d'étudier un exemple de droite d'Euler.
On considère un cube ABCDEFGH de côté une unité.
L'espace est muni du repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AE}\right)$.
On note I le milieu du segment [AB] et J le milieu du segment [BG].



1. Donner sans justification les coordonnées des points A, B, G, I et J.

2. **a.** Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AJ).

   b. Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite (IG) est :

$$\left\{\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \\ y = \quad\quad t \\ z = \quad\quad t \end{array}\right. \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

   c. Démontrer que les droites (AJ) et (IG) sont sécantes en un point S de coordonnées $S\left(\frac{2}{3}\,;\,\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\right)$.

3. **a.** Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\,(0\,;\,-1\,;\,1)$ est normal au plan (ABG).

   b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABG).

c. On admet qu'une représentation paramétrique de la droite (d) de vecteur directeur $\overrightarrow{n}$ et passant par le point K de coordonnées $\left(\frac{1}{2}\ ;\ 0\ ;\ 1\right)$ est :

$$\left\{\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \\ y = \quad -t \\ z = 1 + t \end{array}\right. \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

Montrer que cette droite (d) coupe le plan (ABG) en un point L de coordonnées $L\left(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$.

d. Montrer que le point L est équidistant des points A, B et G.

4. Montrer que le triangle ABG est rectangle en B.

5. **a.** Identifier le centre du cercle circonscrit, le centre de gravité et l'orthocentre du triangle ABG (aucune justification n'est attendue).

b. Vérifier par un calcul que ces trois points sont effectivement alignés.

Résolution avec wxMaxima et le package geomana3d.mac

1) On lit les coordonnées dans le repère donné

(% i4) A :[0,0,0] ;B :[1,0,0] ;G :[1,1,1] ;

$(A)\quad [0,0,0]$

$(B)\quad [1,0,0]$

$(G)\quad [1,1,1]$

(% i6) I :(A+B)/2 ;J :(B+G)/2 ;

$(I)\quad \left[\frac{1}{2},0,0\right]$

$(J)\quad \left[1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$

On a calculé les coordonnées de I et J avec Maxima, mais on pouvait les donner directement.
2) a) La droite (AJ) passe par A et est dirigée par le vecteur u=vec(AJ)

(% i7) u :J-A ;

$(u)\quad \left[1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$

(% i8) eqd1 :equation_droite(A,u,t)$

Equations paramétriques de la droite : $\left[x=t,y=\frac{t}{2},z=\frac{t}{2},t\right]$

2) b) La droite (IG) passe par I et est dirigée par le vecteur IG

(% i9) eqd2 :equation_droite(I,G-I,k)$

Equations paramétriques de la droite : $\left[x=\frac{k}{2}+\frac{1}{2},y=k,z=k,k\right]$

2) c) Recherche de l'intersection des deux droites

(% i10) S :intersection_droite_droite(eqd1,eqd2)$

Pour savoir si deux droites de l'espace sont sécantes, on essaye de résoudre le système
obtenu en égalant les x, y et z tirés des équations paramétriques
avec comme inconnus les deux paramètres. Si le sytème a une solution alors il existe
un point d'interserction que l'on obtient en remplaçant les paramètres par leurs valeurs.
Si le système n'a pas de solution, alors les deux droites ne sont pas sécantes.

——— $solve : dependentequationseliminated : (3)$

Les deux droites sont sécantes au point : $\left[\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$

Valeurs des paramètres : $t = \frac{2}{3}$ et $k = \frac{1}{3}$

3) a) on montre que n est orthogonal aux vecteurs AB et AG, qui dirigent le plan

(% i13) n :[0,-1,1] ;B-A ;G-A ;

(n) $[0, -1, 1]$

$(\%o12)$ $[1, 0, 0]$

$(\%o13)$ $[1, 1, 1]$

(% i14) is_colineaire(B-A,G-A)$

Pour savoir si deux vecteurs sont colinéaires, on cherche si leurs coordonnées sont proportionnelles.
Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

(% i15) produit_scalaire(n,B-A)$

Si u(x,y,z) et v(x',y',z') alors le produit scalaire est égal à xx'+yy'+zz'
Le produit scalaire des deux vecteurs est égal à 0

(% i17) produit_scalaire(n,G-A)$

Si u(x,y,z) et v(x',y',z') alors le produit scalaire est égal à xx'+yy'+zz'
Le produit scalaire des deux vecteurs est égal à 0
donc n est bien un vecteur normal au plan (ABG).

3) b) Connaissant un point et un vecteur normal, une équation du plan (ABG) est :

(% i20) eqP :equation_plan2(n,A)$

Un plan a pour équation de manière générale ax+by+cz+d=0
Les coordonnées du vecteur normal donnent respectivement les coefficients de x, y et z
On trouve d en résolvant l'équation obtenue en remplaçant x, y et z par les coordonnées du point.
Valeur calculée de la constante d : 0
Une équation du plan défini par ce vecteur normal et ce point est donc : $z - y = 0$
3) c) On cherche l'intersection de la droite et du plan, après avoir généré les équations de (d)

(% i23) K :[1/2,0,1] ;

(K) $\left[\frac{1}{2}, 0, 1\right]$

(% i27) eqd3 :equation_droite(K,n,t)$

Equations paramétriques de la droite : $\left[x=\frac{1}{2}, y=-t, z=t+1, t\right]$

(% i29) L :intersection_plan_droite(eqd3,eqP)$

On résout le système d'équations formé par les équations de la droite et celle du plan.
Coordonnées du point d'intersection : $\left[x=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{2}, z=\frac{1}{2}\right]$

Valeur du paramètre $t=-\left(\frac{1}{2}\right)$

3) d) Il suffit de calculer les différentes longueurs et de vérifier qu'elles sont égales.

(% i31) AL :norme(A,L)$

Longueur du segment : $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(% i32) BL :norme(B,L)$

Longueur du segment : $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(% i33) GL :norme(G,L)$

Longueur du segment : $\frac{\sqrt{3}}{2}$

4) On utilise la réciproque du théorème de Pythagore

(% i37) print(AGˆ 2= ,norme2(A,G)ˆ 2)$

AG^2= 3

(% i39) print(ABˆ 2= ,norme2(A,B)ˆ 2)$

AB^2= 1

(% i40) print(BGˆ 2= ,norme2(B,G)ˆ 2)$

BG^2= 2

et l'on a bien $AB^2+BG^2 = AG^2$, CQFD.

On peut aussi vérifier que les vecteurs BA et BG sont orthogonaux avec le produit scalaire

(% i41) produit_scalaire(A-B,G-B)$

Si u(x,y,z) et v(x',y',z') alors le produit scalaire est égal à xx'+yy'+zz'
Le produit scalaire des deux vecteurs est égal à 0

5) a) S est le centre de gravité du triangle ABG, L est le centre du cercle circonscrit et B est l'orthocentre.

5) b) on vérifie la colinéarité des vecteurs SL et SB par exemple :

(% i42) L-S ;

(%o42) $\left[-\left(\frac{1}{6}\right),\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right]$

(% i43) B-S;

(%o43) $\left[\frac{1}{3},-\left(\frac{1}{3}\right),-\left(\frac{1}{3}\right)\right]$

(% i45) is_colineaire(L-S,B-S)$

Pour savoir si deux vecteurs sont colinéaires, on cherche si leurs coordonnées sont proportionnelles.
Ces deux vecteurs sont colinéaires.
On a en effet : $\left[-\left(\frac{1}{6}\right),\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right]=-\left(\frac{1}{2}\right)\times\left[\frac{1}{3},-\left(\frac{1}{3}\right),-\left(\frac{1}{3}\right)\right]$
Ce qui prouve bien l'alignement des trois points.