BACCALAURÉAT 2025 CENTRES ETRANGERS S SPÉCIALITÉ
CORRECTION DE L'EXERCICE 4

La correction de cet exercice montre l'utilisation du package `geomana3d.mac` qui fournit des commandes permettant la résolution par les étudiants des exercices de géométrie analytique en 3D des programmes du lycée.

On charge le paquetage :

```
-->   load( geomana3d.mac )$
```

La commande info_ package_ geom3d() donne les informations sur ce package.

Enoncé de l'exercice (Source : Annales de l'APMEP)

Exercice 4 — 4 points

On se place dans un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$ de l'espace.

On considère les points A$(1\,;0\,;3)$, B$(-2\,;\,1\,;\,2)$ et C$(0\,;3\,;2)$.

1. **a.** Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

   b. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}$ Vérifier que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal au plan (ABC).

   c. En déduire que le plan (ABC) admet pour équation cartésienne $-x+y+4z-11=0$.

On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $3x-3y+2z-9=0$ et le plan $\mathscr{P}'$ d'équation cartésienne $x-y-z+2=0$.

2. **a.** Démontrer que les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont sécants. On note (d) leur droite d'intersection.

   b. Déterminer si les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont perpendiculaires.

3. Montrer que la droite (d) est dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

4. Montrer que le point M$(2\,;\,1\,;\,3)$ appartient aux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$. En déduire une représentation paramétrique de la droite (d).

5. Montrer que la droite (d) est aussi incluse dans le plan (ABC).

   Que peut-on dire des trois plans (ABC), $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$?

Résolution avec wxMaxima et le package geomana3d.mac

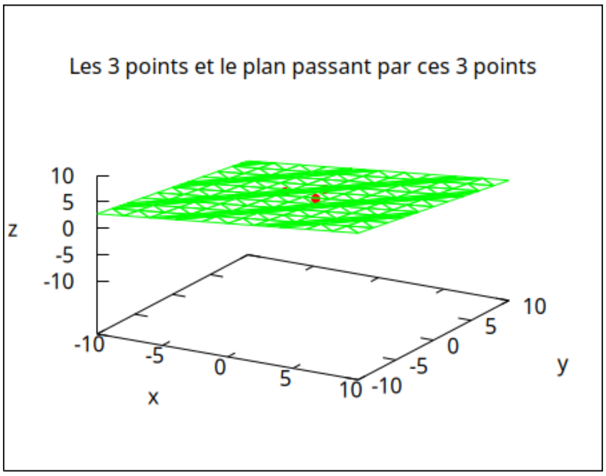
Commençons par définir les points :

(% i4) A :[1,0,3]$B :[-2,1,2]$C :[0,3,2]$

1. a. On vérifie si les 3 points définissent un plan

(% i5) is_plan(A,B,C)$

Les 3 points $[1,0,3]$, $[-2,1,2]$ et $[0,3,2]$ forment bien un plan.
En effet, les trois points ne sont pas alignés. Pour le démontrer, on peut définir
deux vecteurs directeurs à partir des 3 points et vérifier qu'ils ne sont pas colinéaires.
Vecteur normal au plan : $[2,-2,-8]$
Equation du plan : $-(8z)-2y+2x+22=0$



1. b. On définit le vecteur n et on vérifie qu'il est normal au plan (ABC).

(% i6) n :[-1,1,4]$

(% i7) is_normal(n,A,B,C)$

Pour savoir si un vecteur est normal à un plan, on prouve que ce vecteur est orthogonal
à deux vecteurs directeurs du plan, en calculant le produit scalaire qui doit être nul
produit scalaire 1 : $[-1,1,4]\ .\ [-3,1,-1]\ = 0$
produit scalaire 2 : $[-1,1,4]\ .\ [-1,3,-1]\ = 0$
Ce vecteur est bien normal au plan

1. c. Connaissant un point et un vecteur normal, on trouve une équation du plan (ABC) :

(% i8) eqABC :equation_plan2(n,A)$

Un plan a pour équation de manière générale ax+by+cz+d=0
Les coordonnées du vecteur normal donnent respectivement les coefficients de x, y et z
On trouve d en résolvant l'équation obtenue en remplaçant x, y et z par les coordonnées du point.
Valeur calculée de la constante d : -11
Une équation du plan défini par ce vecteur normal et ce point est donc : $4z+y-x-11=0$

2. a. On définit les deux plans :

(% i9) p :3*x-3*y+2*z-9=0$

(% i10) pp :x-y-z+2=0$

(% i11) np :normal(p)$

Les coordonnées d'un vecteur normal sont les coefficients de x, y et z dans l'équation du plan.

Un vecteur normal au plan est $[3,-3,2]$

(% i12) npp :normal(pp)$

Les coordonnées d'un vecteur normal sont les coefficients de x, y et z dans l'équation du plan.

Un vecteur normal au plan est $[1,-1,-1]$

(% i13) is_colineaire(np,npp)$

Pour savoir si deux vecteurs sont colinéaires, on cherche si leurs coordonnées sont proportionnelles.
Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires. Les deux plans sont donc bien sécants.

Soit d la droite d'intersection.

2. b. On calcule le produit scalaire des vecteurs normaux connus des deux plans :

(% i14) produit_scalaire(np,npp)$
$[3,-3,2] . [1,-1,-1] = 3 \text{ x } 1 + -3 \text{ x } -1 + 2 \text{ x } -1 = 4$
Le produit scalaire de ces deux vecteurs est égal à : 4

Le produit scalaire est non nul, donc les vecteurs ne sont pas orthogonaux, ce qui démontre que les plans P et P' ne sont pas perpendiculaires.

3. a. On définit le vecteur u et l'on vérifie que u est orthogonal aux vecteurs normaux de P et P'en calculant le produit scalaire de u avec chacun de ces vecteurs.

(% i15) u :[1,1,0]$

(% i16) produit_scalaire(u,np)$
$[1,1,0] . [3,-3,2] = 1 \text{ x } 3 + 1 \text{ x } -3 + 0 \text{ x } 2 = 0$
Le produit scalaire de ces deux vecteurs est égal à : 0

(% i17) produit_scalaire(u,npp)$
$[1,1,0] . [1,-1,-1] = 1 \text{ x } 1 + 1 \text{ x } -1 + 0 \text{ x } -1 = 0$
Le produit scalaire de ces deux vecteurs est égal à : 0

Ceci prouve bien que la droite d est dirigée par le vecteur u.

4. Vérifions l'appartenance de M aux deux plans, et donc à la droite d :

(% i18) M :[2,1,3]$

(% i20) is_point_plan_eq(M,pp)$

On teste si les coordonnées du point vérifient l'équation du plan.

$1 \text{ x } 2 + -1 \text{ x } 1 + -1 \text{ x } 3 + 2 = 0$
donc le point appartient au plan.

(% i21) eqd :equation_droite(M,u,t)$

Equations paramétriques de la droite : $[x=t+2, y=t+1, z=3, t]$

5. On a obtenu l'équation de la droite d, mais en utilisant les notations du package, c'est à dire que le paramètre t apparait en dernière position dans la liste.Pour montrer que la droite d est incluse dans le plan (ABC), on va générer deux points de la droite en choisissant deux valeurs pour le paramètre et vérifier que ces points appartiennent à (ABC) :

(% i22) X1 :point_droite(eqd,-1)$

Le point de la droite ainsi défini a pour coordonnées : $[1,0,3]$

(% i23) is_point_plan_pts(X1,A,B,C)$

On calcule une équation du plan défini par les 3 points puis
on teste si les coordonnées du point vérifient l'équation du plan.
Les 3 points $[1,0,3]$, $[-2,1,2]$ et $[0,3,2]$ forment bien un plan.
Un vecteur normal au plan est : $[2,-2,-8]$
Une équation du plan est : $-(8z)-2y+2x+22=0$
Le point appartient au plan.

(% i24) X2 :point_droite(eqd,1)$

Le point de la droite ainsi défini a pour coordonnées : $[3,2,3]$

(% i25) is_point_plan_pts(X2,A,B,C)$

On calcule une équation du plan défini par les 3 points puis
on teste si les coordonnées du point vérifient l'équation du plan.
Les 3 points $[1,0,3]$, $[-2,1,2]$ et $[0,3,2]$ forment bien un plan.
Un vecteur normal au plan est : $[2,-2,-8]$
Une équation du plan est : $-(8z)-2y+2x+22=0$
Le point appartient au plan. Il est aussi possible de tester l'appartenance des points X1 et X2 en utilisant l'équation du plan (ABC) :

(% i26) eqABC;
$4z+y-x-11=0$

(% i27) is_point_plan_eq(X1,eqABC)$

On teste si les coordonnées du point vérifient l'équation du plan.

$-1 \text{ x } 1 + 1 \text{ x } 0 + 4 \text{ x } 3 + -11 = 0$
donc le point appartient au plan.

(% i28) is_point_plan_eq(X2,eqABC)$

On teste si les coordonnées du point vérifient l'équation du plan.

$-1 \text{ x } 3 + 1 \text{ x } 2 + 4 \text{ x } 3 + -11 = 0$
donc le point appartient au plan. On en conclut que les trois plans (ABC), P et P' sont sécants en d.

Représentons graphiquement la situation

(% i29)

```
wxdraw3d(point_size=1,color=red,point_type=7,
xlabel= x ,ylabel= y ,zlabel= z ,grid=true,xaxis=true,yaxis=true,zaxis=true,
xrange=[-3,3],yrange=[-1,4],zrange=[0,5],
surface_hide=true,nticks=50,adapt_depth=20,
title= figure - exercice 4 ,
label([ A ,1,0,3],[ B ,-2,1,2],[ C ,0,3,2],[ M ,2,1,2]),
color=blue,
parametric(t,0,0,t,-10,10),parametric(0,t,0,t,-10,10),parametric(0,0,t,t,-10,10),
color=black,
points([A,B,C,M]),
color=green,
implicit(eqABC,x,-5,5,y,-5,5,z,-5,5),
color=magenta,
implicit(p,x,-5,5,y,-5,5,z,-5,5),
color=orange,
implicit(pp,x,-5,5,y,-5,5,z,-5,5),
color=black,
parametric(t+2,t+1,3,t,-10,10)
)$
```