BACCALAURÉAT MÉTROPOLE S SPÉCIALITÉ 2024
CORRECTION DE L'EXERCICE 3

La correction de cet exercice montre l'utilisation du package `geomana3d.mac` qui fournit des commandes permettant la résolution par les étudiants des exercices de géométrie analytique en 3D des programmes du lycée.

On charge le paquetage :

```
-->    load( geomana3d.mac )$
```

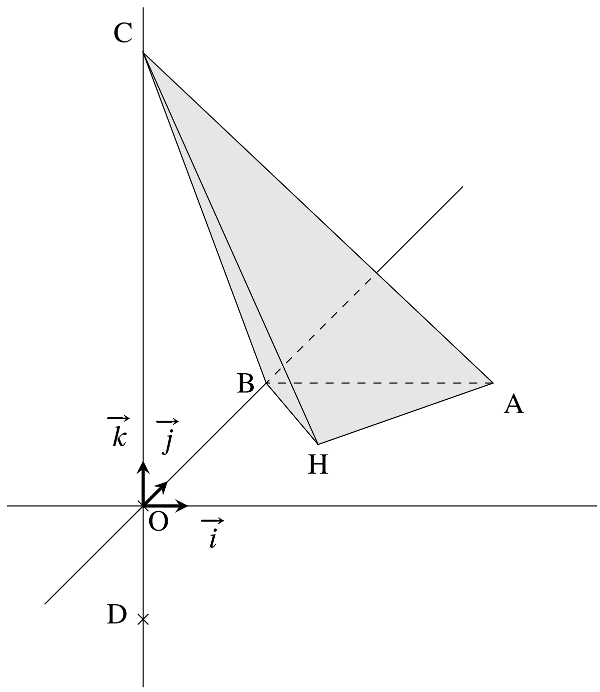
La commande info_ package_ geom3d() donne les informations sur ce package.

Enoncé de l'exercice (Source : Annales de l'APMEP)

EXERCICE 3 **5 points**

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

On considère les points A(5 ; 5 ; 0), B(0 ; 5 ; 0), C(0 ; 0 ; 10) et $D\left(0\,;\ 0\,;\ -\frac{5}{2}\right)$.



1. **a.** Montrer que $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (CAD).

   b. En déduire que le plan (CAD) a pour équation cartésienne : $x - y = 0$.

2. On considère la droite $\mathscr{D}$ de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& \frac{5}{2}t \\ y &=& 5-\frac{5}{2}t \\ z &=& 0\end{array}\right.$ où $t \in \mathbb{R}$.

a. On admet que la droite $\mathscr{D}$ et le plan (CAD) sont sécants en un point H. Justifier que les coordonnées de H sont $\left(\frac{5}{2}\ ;\ \frac{5}{2}\ ;\ 0\right)$.

b. Démontrer que le point H est le projeté orthogonal de B sur le plan (CAD).

3. **a.** Démontrer que le triangle ABH est rectangle en H.

b. En déduire que l'aire du triangle ABH est égale à $\frac{25}{4}$.

4. **a.** Démontrer que (CO) est la hauteur du tétraèdre ABCH issue de C.

b. En déduire le volume du tétraèdre ABCH.

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par : $V = \frac{1}{3}\mathscr{B}h$, où $\mathscr{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.

5. On admet que le triangle ABC est rectangle en B. Déduire des questions précédentes la distance du point H au plan (ABC).

Résolution avec wxMaxima et le package geomana3d.mac

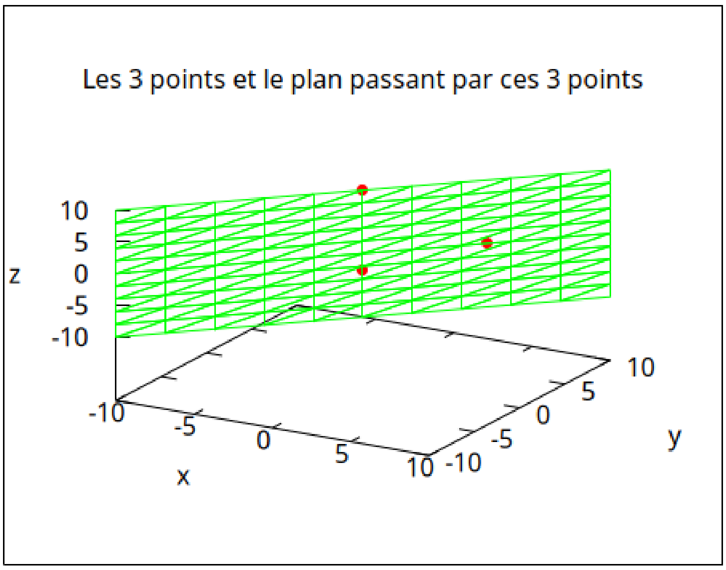
On commence par définir les points et le vecteur n1. On converve l'option bavard :1 définie par défaut afin d'afficher les commentaires et les explications des calculs effectués par Maxima.

-->
```
A :[5,5,0]$B :[0,5,0]$C :[0,0,10]$D :[0,0,-5/2]$n1 :[1,-1,0]$
```

On vérifie que les trois points CAD forment un plan :

-->
```
is_plan(C,A,D)$
```

Les 3 points $[0,0,10]$, $[5,5,0]$ et $\left[0,0,-\left(\frac{5}{2}\right)\right]$ forment bien un plan.
En effet, les trois points ne sont pas alignés. Pour le démontrer, on peut définir
deux vecteurs directeurs à partir des 3 points et vérifier qu'ils ne sont pas colinéaires.
Vecteur normal au plan : $\left[-\left(\frac{125}{2}\right),\frac{125}{2},0\right]$
Equation du plan : $\frac{125y}{2}-\frac{125x}{2}=0$



1.a. On teste si le vecteur n1 est normal à ce plan :

−> is_normal(n1,C,A,D)$

Pour savoir si un vecteur est normal à un plan, on prouve que ce vecteur est orthogonal
à deux vecteurs directeurs du plan, en calculant le produit scalaire qui doit être nul
produit scalaire 1 : $[1,-1,0]$. $[5,5,-10]$ $=0$
produit scalaire 2 : $[1,-1,0]$. $\left[0,0,-\left(\frac{25}{2}\right)\right]$ $=0$
Ce vecteur est bien normal au plan On définit une équation pour ce plan :

−> eq :equation_plan(C,A,D)$

Les 3 points $[0,0,10]$, $[5,5,0]$ et $\left[0,0,-\left(\frac{5}{2}\right)\right]$ forment bien un plan.
Un vecteur normal au plan est : $\left[-\left(\frac{125}{2}\right),\frac{125}{2},0\right]$
Une équation du plan est : $\frac{125y}{2}-\frac{125x}{2}=0$
Première méthode : on montre que cette équation correspond bien au plan défini par x-y=0 :

−> compare_equation_plan(x-y=0,eq) ;

Pour savoir si ces deux équations correspondent à un même plan,
on cherche si les deux équations sont proportionnnelles (coefficients proportionnels)
Plan 1 normalisé : $x-y$
Plan 2 normalisé : $x-y$

Les deux équations correspondent au même plan (équations proportionnelles).

Deuxième méthode : on génère l'équation du plan avec le vecteur n1 et un point du plan :

−> eq2 :equation_plan2(n1,A)$

Un plan a pour équation de manière générale ax+by+cz+d=0
Les coordonnées du vecteur normal donnent respectivement les coefficients de x, y et z
On trouve d en résolvant l'équation obtenue en remplaçant x, y et z par les coordonnées du point.
Valeur calculée de la constante d : 0
Une équation du plan défini par ce vecteur normal et ce point est donc : $x-y=0$

Troisième méthode : on vérifie que les trois points C, A et D vérifient l'équation du plan x-y=0 :

−> is_point_plan_eq(A,eq2)$

On teste si les coordonnées du point vérifient l'équation du plan.
Le point appartient au plan.

−> is_point_plan_eq(C,eq2)$

On teste si les coordonnées du point vérifient l'équation du plan.
Le point appartient au plan.

−> is_point_plan_eq(D,eq2)$

On teste si les coordonnées du point vérifient l'équation du plan.
Le point appartient au plan.

2. a. On définit la droite par les équations paramétriques, puis on cherche le point d'intersection demandé :

-->	dr :[x=5/2*t,y=5-5/2*t,z=0,t]$

-->	H :intersection_plan_droite(dr,eq2);

On résout le système d'équations formé par les équations de la droite et celle du plan.
Coordonnées du point d'intersection : $\left[x=\frac{5}{2}, y=\frac{5}{2}, z=0\right]$
Valeur du paramètre $t=1$

(H) $\left[\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 0\right]$

Le point H est bien le point d'intersection cherché.

2. b. Calcul du projeté orthogonal de B sur le plan CAD, sachant que eq2 est une équation du plan.

-->	proj_ortho(B,eq2)$

On trouve un système d'équations paramétriques de la droite passant par le point dirigée par un vecteur normal au plan puis on cherche le point d'intersection de cette droite avec le plan.
Equation de la droite perpendiculaire au plan passant par le point : $[x=t, y=5-t, z=0, t]$
Coordonnées du point d'intersection : $\left[\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 0\right]$

On en conclut donc bien que ce point H est aussi le projeté orthogonal de B sur le plan CAD.

3.a. On vérifie que le triangle ABH est rectangle en H :

-->	is_rectangle(A,B,H)$

Si l'on appelle T, R et I les trois sommets de ce triangle dans l'ordre de saisie.
Méthode 1 : on vérifie si la réciproque du théorème de Pythagore est vérifiée.
Vecteur TR : $[-5, 0, 0]$
Vecteur TI : $\left[-\left(\frac{5}{2}\right), -\left(\frac{5}{2}\right), 0\right]$
Vecteur RI : $\left[\frac{5}{2}, -\left(\frac{5}{2}\right), 0\right]$
Calcul des carrés des cotés : TR^2 = 25 TI^2 = $\frac{25}{2}$ RI^2 = $\frac{25}{2}$
Le triangle est rectangle en I car 25 = $\frac{25}{2} + \frac{25}{2}$
Méthode 2 : on calcule les produits scalaires des 3 vecteurs définis par les 3 sommets.
On a un angle droit lorsque le produit scalaire vaut 0.
Calcul des produits scalaires : TR.TI = $\frac{25}{2}$ TR· RI = $-\left(\frac{25}{2}\right)$ TI· RI = 0
Le triangle est donc rectangle en I

3. b. L'aire d'un triangle est donnée par la formule 1/2*base*hauteur. La base est AH et la hauteur associée BH :

-->	AH :norme(A,H)$BH :norme(B,H)$

Longueur du segment : $\frac{5}{\sqrt{2}}$
Longueur du segment : $\frac{5}{\sqrt{2}}$

-->   aire :1/2*AH*BH;

(aire) $\frac{25}{4}$

Méthode alternative : fonction pour calculer directement l'aire du triangle :

-->   aire_triangle(A,B,H)$

L'aire d'un triangle se calcule par la formule (base x hauteur)/2 si l'on connait une hauteur et la base associée
Vectoriellement, l'aire du triangle ABC est aussi égale à 1/2xnorme(AB Λ AC), où Λ est le produit vectoriel

$\frac{25}{4}$

4. a. On montre que O appartient au plan ABH et que (CO) est perpendiculaire à ce plan (après avoir défini O). Pour cela, on montrera que le vecteur CO est normal au plan :

-->   O :[0,0,0]$

-->   is_point_plan_pts(O,A,B,H)$

On calcule une équation du plan défini par les 3 points puis
on teste si les coordonnées du point vérifient l'équation du plan.
Les 3 points $[5,5,0]$, $[0,5,0]$ et $\left[\frac{5}{2},\frac{5}{2},0\right]$ forment bien un plan.
Un vecteur normal au plan est : $\left[0,0,\frac{25}{2}\right]$
Une équation du plan est : $\frac{25z}{2}=0$
Le point appartient au plan.

-->   is_normal(O-C,A,B,H)$

Pour savoir si un vecteur est normal à un plan, on prouve que ce vecteur est orthogonal
à deux vecteurs directeurs du plan, en calculant le produit scalaire qui doit être nul
produit scalaire 1 : $[0,0,-10]$. $[-5,0,0]$ = 0
produit scalaire 2 : $[0,0,-10]$. $\left[-\left(\frac{5}{2}\right),-\left(\frac{5}{2}\right),0\right]$ = 0
Ce vecteur est bien normal au plan

4. b) D'après la configuration géométrique, le volume du tétraèdre est donc égal à

1/3*aire(ABH)*longueur(CO) (ou norme du vecteur CO).

-->   volume :1/3*aire*normev(O-C);

(volume) $\frac{125}{6}$

5. Vérifions que le triangle ABC est rectangle en B (le texte permet cependant de ne pas le démontrer).

-->   is_rectangle(A,B,C)$

Si l'on appelle T, R et I les trois sommets de ce triangle dans l'ordre de saisie.
Méthode 1 : on vérifie si la réciproque du théorème de Pythagore est vérifiée.

Vecteur TR : $[-5,0,0]$
Vecteur TI : $[-5,-5,10]$
Vecteur RI : $[0,-5,10]$
Calcul des carrés des cotés : TR^2 = 25 TI^2 = 150 RI^2 = 125
Le triangle est rectangle en R car 150 = 25 + 125
Méthode 2 : on calcule les produits scalaires des 3 vecteurs définis par les 3 sommets.
On a un angle droit lorsque le produit scalaire vaut 0.
Calcul des produits scalaires : TR.TI = 25 TR· RI = 0 TI· RI = 125
Le triangle est donc rectangle en R

En prenant comme base du tétraèdre ABC, la distance du point H au plan ABC représente la hauteur associée.Appelons x cette distance. Le volume du tétraèdre est alors :

```
-->   aire1 :aire_triangle(A,B,C)$
```

L'aire d'un triangle se calcule par la formule (base x hauteur)/2 si l'on connait une hauteur et la base associée
Vectoriellement, l'aire du triangle ABC est aussi égale à 1/2xnorme(AB Λ AC), où Λ est le produit vectoriel

$$\frac{5^{\frac{5}{2}}}{2}$$

```
-->   volume1 :1/3*aire1*x;
```

(volume1) $\frac{5^{\frac{5}{2}}x}{6}$

```
-->   volume;
```

(% o30) $\frac{125}{6}$

```
-->   volume1;
```

(% o31) $\frac{5^{\frac{5}{2}}x}{6}$

Il suffit alors de résoudre en x, puisque ces deux volumes sont tous les deux égaux au volume du tétraèdre :

```
-->   solve(volume=volume1,x);
```

(% o32) $\left[x=\sqrt{5}\right]$

La distance cherchée est donc égale à sqrt(5).

Pour terminer, nous représentons graphiquement les objets de cet exercice.

```
-->     wxdraw3d(point_size=1,color=red,point_type=7,
        xlabel= x ,ylabel= y ,zlabel= z ,grid=true,xaxis=true,yaxis=true,zaxis=true,
        xrange=[-1,6],yrange=[0,6],zrange=[-3,11],
        title= figure - exercice 3 ,
        label([ A ,5,5,1.8],[ B ,0,5,1.8],[ C ,0.3,0,10],[ D ,0.3,0,-5/2],[ O ,0.3,0,0],[ H ,5/2,5/2,1.8]),
        color=blue,
        parametric(t,0,0,t,-10,10),parametric(0,t,0,t,-10,10),parametric(0,0,t,t,-10,10),
        color=red,
        points([A,B,C,D,H]),
        color=green,
        points_joined=true,points([A,B,H,A,C,H]),points([A,C]),
        color=black,
        parametric(0,5*t,0,t,-10,10)
        );
```