

BACCALAURÉAT 2025 MÉTROPOLÉ JOURNÉE 1 S SPÉCIALITÉ
CORRECTION DE L'EXERCICE 3

La correction de cet exercice montre l'utilisation du package `geomana3d.mac` qui fournit des commandes permettant la résolution par les étudiants des exercices de géométrie analytique en 3D des programmes du lycée.

On charge le paquetage :

-> `load(geomana3d.mac)$`

La commande `info_ package_ geom3d()` donne les informations sur ce package.

Enoncé de l'exercice (Source : Annales de l'APMEP)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier chaque réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. On considère les points $A(-1; 0; 5)$ et $B(3; 2; -1)$.

Affirmation 1 : Une représentation paramétrique de la droite (AB) est

$$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 2 - t \\ z = -1 + 3t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

Affirmation 2 : Le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal au plan (OAB).

2. On considère :

- la droite d de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 15 + k \\ y = 8 - k \\ z = -6 + 2k \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{R}$;
- la droite d' de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + 4s \\ y = 2 + 4s \\ z = 1 - 6s \end{cases}$ avec $s \in \mathbb{R}$.

Affirmation 3 : Les droites d et d' ne sont pas coplanaires.

3. On considère le plan \mathcal{P} d'équation $x - y + z + 1 = 0$.

Affirmation 4 : La distance du point $C(2; -1; 2)$ au plan \mathcal{P} est égale à $2\sqrt{3}$.

Résolution avec wxMaxima et le package geomana3d.mac

Saisissons quelques objets définis dans cet exercice

`(% i12) O :[0,0,0];A :[-1,0,5];B :[3,2,-1];eqD :[x=3-2*t,y=2-t,z=-1+3*t,t];`
`(O) [0,0,0]`

`(A) [-1,0,5]`

`(B) [3,2,-1]`

`(eqD) [x=3-2t,y=2-t,z=3t-1,t]`

1 Affirmation 1

On teste si A et B vérifient l'équation paramétrique proposée

```
(% i14) is_point_droite(A,eqD)$
```

On cherche s'il existe une valeur du paramètre pour lequel les équations paramétriques donnent

les coordonnées du point, en résolvant le système linéaire correspondant.

```
solve:dependentequationseliminated:(32)
```

Le système admet une solution pour $t = 2$

donc le point $[-1, 0, 5]$ appartient à la droite.

```
(% i15) is_point_droite(B,eqD)$
```

On cherche s'il existe une valeur du paramètre pour lequel les équations paramétriques donnent

les coordonnées du point, en résolvant le système linéaire correspondant.

```
solve:dependentequationseliminated:(32)
```

Le système admet une solution pour $t = 0$

donc le point $[3, 2, -1]$ appartient à la droite. L'affirmation est donc vraie.

2 Affirmation 2

On peut vérifier que O, A et B forment bien un plan

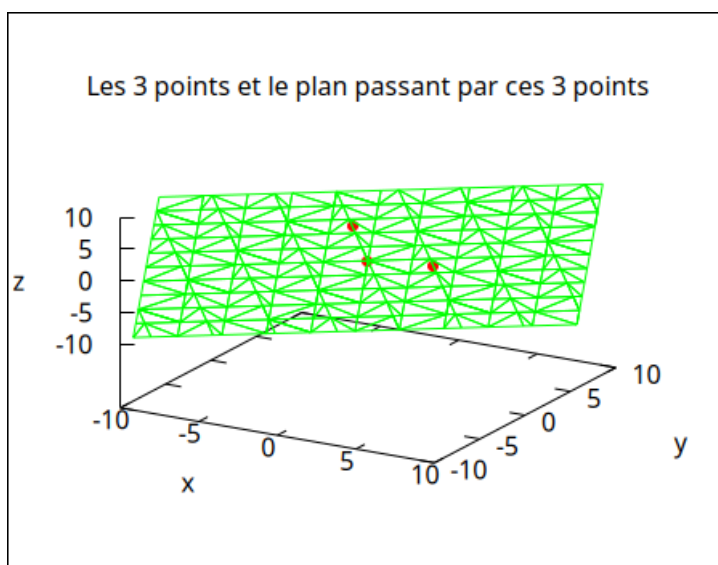
```
(% i18) is_plan(O,A,B);
```

Les 3 points $[0, 0, 0]$, $[-1, 0, 5]$ et $[3, 2, -1]$ forment bien un plan.

En effet, les trois points ne sont pas alignés. Pour le démontrer, on peut définir deux vecteurs directeurs à partir des 3 points et vérifier qu'ils ne sont pas colinéaires.

Vecteur normal au plan : $[-10, 14, -2]$

Equation du plan : $-(2z) + 14y - 10x = 0$



On teste si n est orthogonal aux vecteurs OA et OB , directeurs du plan OAB

(% i19) $n : [5, -2, 1];$
(n) $[5, -2, 1]$

(% i20) produit_scalaire($n, A-O$)\$

Si $u(x, y, z)$ et $v(x', y', z')$ alors le produit scalaire est égal à $xx' + yy' + zz'$

Le produit scalaire des deux vecteurs est égal à 0

(% i21) produit_scalaire($n, B-O$)\$

Si $u(x, y, z)$ et $v(x', y', z')$ alors le produit scalaire est égal à $xx' + yy' + zz'$

Le produit scalaire des deux vecteurs est égal à 10 Le vecteur n n'est pas orthogonal au vecteur OB , donc n n'est pas un vecteur normal.

3 Affirmation 3

(% i32) eqd1 : $[x=15+k, y=8-k, z=-6+2*k, k];$ eqd2 : $[x=1+4*s, y=2+4*s, z=1-6*s, s];$

(eqd1) $[x = k + 15, y = 8 - k, z = 2k - 6, k]$

(eqd2) $[x = 4s + 1, y = 4s + 2, z = 1 - 6s, s]$ Cherchons un vecteur directeur de chaque droite, et testons s'ils sont colinéaires :

(% i34) u1 : vecteur_directeur_droite(eqd1)\$

Les coefficients devant le paramètre de la droite donnent par lecture un vecteur directeur.

Un vecteur directeur de la droite a pour coordonnées $[1, -1, 2]$

(% i35) u2 : vecteur_directeur_droite(eqd2)\$

Les coefficients devant le paramètre de la droite donnent par lecture un vecteur directeur.

Un vecteur directeur de la droite a pour coordonnées $[4, 4, -6]$

(% i37) is_colineaire($u1, u2$)\$

Pour savoir si deux vecteurs sont colinéaires, on cherche si leurs coordonnées sont proportionnelles.

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires. On en conclut que ces deux droites ne sont pas parallèles. Cherchons si elles se coupent :

(% i39) intersection_droite_droite(eqd1, eqd2)\$

Pour savoir si deux droites de l'espace sont sécantes, on essaye de résoudre le système obtenu en égalant les x , y et z tirés des équations paramétriques

avec comme inconnus les deux paramètres. Si le système a une solution alors il existe un point d'intersection que l'on obtient en remplaçant les paramètres par leurs valeurs.

Si le système n'a pas de solution, alors les deux droites ne sont pas sécantes.

———— solve: dependent equations eliminated: (3)

Les deux droites sont sécantes au point : $[11, 12, -14]$

Valeurs des paramètres : $k = -4$ et $s = \frac{5}{2}$ Les deux droites sont sécantes donc coplanaires, l'affirmation est fausse.

4 Affirmation 4

(% i44) eqP :x-y+z+1=0;C :[2,-1,2];
(eqP) z - y + x + 1 = 0

(C) [2, -1, 2] On calcule le projeté orthogonal de C sur le plan P

(% i46) H :proj_ortho(C,eqP)\$

On trouve un système d'équations paramétriques de la droite passant par le point dirigée par un vecteur normal au plan puis on cherche le point d'intersection de cette droite avec le plan.
Equation de la droite perpendiculaire au plan passant par le point : $[x = t + 2, y = -t - 1, z = t + 2, t]$
Coordonnées du point d'intersection : $[0, 1, 0]$ On calcule ensuite la distance CH

(% i48) norme(C,H)\$

Longueur du segment : $2\sqrt{3}$ L'affirmation est donc vraie.