Baccalauréat 2025 Métropole S spécialité Remplacement – Correction de l'exercice 2

La correction de cet exercice montre l'utilisation du package `geomana3d.mac` qui fournit des commandes permettant la résolution par les étudiants des exercices de géométrie analytique en 3D des programmes du lycée.

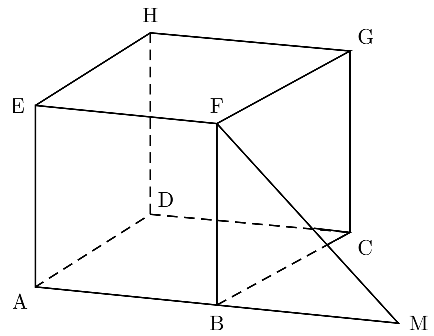
On charge le paquetage :

```
-->  load( geomana3d.mac )$
```

La commande info_ package_ geom3d() donne les informations sur ce package.

Enoncé de l'exercice (Source : Annales de l'APMEP)

On considère le cube ABCDEFGH.
On place le point M tel que BM = AB.



Partie A

1. Montrer que les droites (FG) et (FM) sont perpendiculaires.
2. Montrer que les points A, M, G et H sont coplanaires.

Partie B

On se place dans le repère orthonormé $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{GM}$ et $\overrightarrow{AH}$ et montrer qu'ils ne sont pas colinéaires.
2. **a.** Justifier qu'une représentation paramétrique de la droite (GM) est :

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1-t \\ z = 1-t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

b. On admet qu'une représentation paramétrique de la droite (AH) est :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = k \\ z = k \end{cases} \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}.$$

Montrer que le point d'intersection de (GM) et (AH), que l'on nommera N, a pour coordonnées $(0\,;2\,;2)$.

3. **a.** Montrer que le triangle AMN est un triangle rectangle en A.

b. Calculer l'aire de ce triangle.

4. Soit J le centre de la face BCGF.

a. Déterminer les coordonnées du point J.

b. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{FJ}}$ est un vecteur normal au plan (AMN).

c. Montrer que J appartient au plan (AMN). En déduire qu'il est le projeté orthogonal du point F sur le plan (AMN).

5. On rappelle que le volume $\mathcal{V}$ d'un tétraèdre ou d'une pyramide est donné par la formule :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h,$$

$\mathcal{B}$ étant l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.

Montrer que le volume du tétraèdre AMNF est le double du volume de la pyramide BCGFM.

Résolution avec wxMaxima et le package geomana3d.mac

1 Partie A

Pour mettre en oeuvre le package, on passe en géométrie analytique dans le repère orthonormédéfini dans la partie B, ce qui permet de saisir les coordonnées des différents points :

(% i8) A :[0,0,0] ;B :[1,0,0] ;C :[1,1,0] ;F :[1,0,1] ;G :[1,1,1] ;H :[0,1,1] ;M :[2,0,0] ;

(A) [0,0,0]

(B) [1,0,0]

(C) [1,1,0]

(F) [1,0,1]

(G) [1,1,1]

(H) [0,1,1]

(M) [2,0,0]

(% i9) produit_scalaire(G-F,M-F)$

Si u(x,y,z) et v(x',y',z') alors le produit scalaire est égal à xx'+yy'+zz'
Le produit scalaire des deux vecteurs est égal à 0 F étant commun aux deux droites, elles sont bien perpendiculaires.

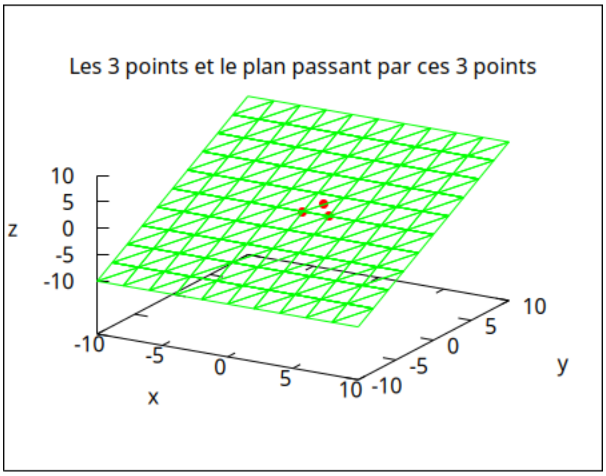
(% i10) is_colineaire(M-A,G-H)$

Pour savoir si deux vecteurs sont colinéaires, on cherche si leurs coordonnées sont proportionnelles.
Ces deux vecteurs sont colinéaires.
On a en effet : [2,0,0] = 2 × [1,0,0] Les droites (AM) et (HG) sont donc parallèles, ce qui prouve que les points sont coplanaires.

(% i11) is_plan(A,M,G)$

Les 3 points [0,0,0] , [2,0,0] et [1,1,1] forment bien un plan.

En effet, les trois points ne sont pas alignés. Pour le démontrer, on peut définir
deux vecteurs directeurs à partir des 3 points et vérifier qu'ils ne sont pas colinéaires.
Vecteur normal au plan : $[0,-2,2]$
Equation du plan : $2z-2y=0$



Autre méthode : on trouve une équation du plan (AMG) et on montre que H appartient à ce plan.

(% i12) eqP1 :equation_plan(A,M,G)$

Les 3 points $[0,0,0]$, $[2,0,0]$ et $[1,1,1]$ forment bien un plan.
Un vecteur normal au plan est : $[0,-2,2]$
Une équation du plan est : $2z-2y=0$

(% i13) is_point_plan_eq(H,eqP1)$

On teste si les coordonnées du point vérifient l'équation du plan. 0 x 0 + -2 x 1 + 2 x 1 + 0 = 0
donc le point appartient au plan. Une macro vérifie directement si un point appartient à un plan défini par 3 points

(% i14) is_point_plan_pts(H,A,M,G)$

On calcule une équation du plan défini par les 3 points puis
on teste si les coordonnées du point vérifient l'équation du plan.
Les 3 points $[0,0,0]$, $[2,0,0]$ et $[1,1,1]$ forment bien un plan.
Un vecteur normal au plan est : $[0,-2,2]$
Une équation du plan est : $2z-2y=0$
Le point appartient au plan.

2 Partie B

On définit les deux vecteurs :

(% i16) vGM :M-G;vAH :H-A;
(vGM) $[1,-1,-1]$

(vAH) $[0,1,1]$

(% i17) is_colineaire(vGM,vAH)$

Pour savoir si deux vecteurs sont colinéaires, on cherche si leurs coordonnées sont proportionnelles.
Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

2) La droite passe par G et est dirigée par le vecteur GM

(% i18) eqd1 :equation_droite(G,vGM,t)$

Equations paramétriques de la droite : $[x=t+1, y=1-t, z=1-t, t]$ On obtient une équation de la droite (AH) de la même manière

(% i19) eqd2 :equation_droite(A,vAH,k)$

Equations paramétriques de la droite : $[x=0, y=k, z=k, k]$

(% i20) N :intersection_droite_droite(eqd1,eqd2)$

Pour savoir si deux droites de l'espace sont sécantes, on essaye de résoudre le système
obtenu en égalant les x, y et z tirés des équations paramétriques
avec comme inconnus les deux paramètres. Si le sytème a une solution alors il existe
un point d'interserction que l'on obtient en remplaçant les paramètres par leurs valeurs.
Si le système n'a pas de solution, alors les deux droites ne sont pas sécantes.
——— $solve : dependentequationseliminated : (3)$
Les deux droites sont sécantes au point : $[0,2,2]$
Valeurs des paramètres : $t=-1$ et $k=2$

3) Vérifions l'orthogonalité des vecteurs AM et AN, ce qui prouvera que AMN est rectangle en A.

(% i21) produit_scalaire(M-A,N-A)$

Si u(x,y,z) et v(x',y',z') alors le produit scalaire est égal à xx'+yy'+zz'
Le produit scalaire des deux vecteurs est égal à 0

Il suffit d'appliquer la formule 1/2*AM*AN pour obtenir l'aire cherchée :

(% i22) Aire :1/2*norme2(A,M)*norme2(A,N);
$(Aire)$ $2^{\frac{3}{2}}$

4) J étant le milieu des segments [B,G] et [C,F] :

(% i23) J :(B+G)/2;
(J) $\left[1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

(% i27) A;M;N;vFJ :J-F;
$(\%o24)$ $[0,0,0]$

$(\%o25)$ $[2,0,0]$

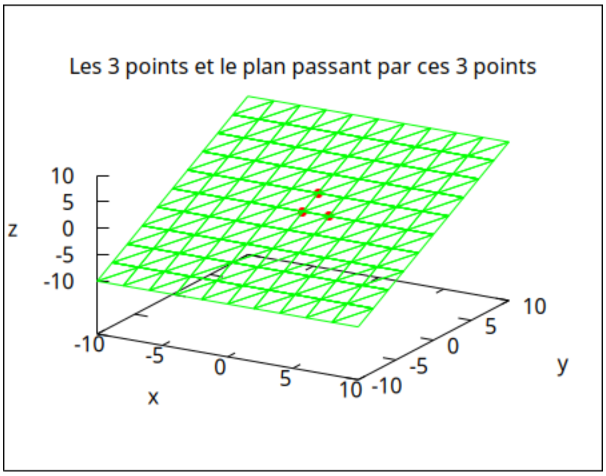
$(\%o26)$ $[0,2,2]$

(vFJ) $\left[0, \frac{1}{2}, -\left(\frac{1}{2}\right)\right]$

(% i28) is_plan(A,M,N)$

Les 3 points $[0,0,0]$, $[2,0,0]$ et $[0,2,2]$ forment bien un plan.
En effet, les trois points ne sont pas alignés. Pour le démontrer, on peut définir

deux vecteurs directeurs à partir des 3 points et vérifier qu'ils ne sont pas colinéaires.
Vecteur normal au plan : $[0,-4,4]$
Equation du plan : $4z-4y=0$



On voit que le vecteur FJ est colinéaire à un vecteur normal du plan (AMN)

(% i29) is_colineaire(vFJ,[0,-4,4])$

Pour savoir si deux vecteurs sont colinéaires, on cherche si leurs coordonnées sont proportionnelles.
Ces deux vecteurs sont colinéaires.
On a en effet : $\left[0,\frac{1}{2},-\left(\frac{1}{2}\right)\right]=-\left(\frac{1}{8}\right)\times[0,-4,4]$ ce qui prouve bien que le vecteur FJ est aussi un vecteur normal au plan.~

Autre méthode : on vérifier l'orthogonalité du vecteur FJ avec les vecteurs AM et AN directeurs du plan

(% i30) produit_scalaire(vFJ,M-A)$

Si u(x,y,z) et v(x',y',z') alors le produit scalaire est égal à xx'+yy'+zz'
Le produit scalaire des deux vecteurs est égal à 0

(% i31) produit_scalaire(vFJ,N-A)$

Si u(x,y,z) et v(x',y',z') alors le produit scalaire est égal à xx'+yy'+zz'
Le produit scalaire des deux vecteurs est égal à 0

On en déduit une équation cartésienne du plan (AMN) connaissant un point A et un vecteur normal FJ

(% i32) eqP2 :equation_plan2(vFJ,A)$

Un plan a pour équation de manière générale ax+by+cz+d=0
Les coordonnées du vecteur normal donnent respectivement les coefficients de x, y et z
On trouve d en résolvant l'équation obtenue en remplaçant x, y et z par les coordonnées du point.
Valeur calculée de la constante d : 0
Une équation du plan défini par ce vecteur normal et ce point est donc : $\frac{y}{2}-\frac{z}{2}=0$

(% i33) is_point_plan_eq(J,eqP2)$

On teste si les coordonnées du point vérifient l'équation du plan. $0 \text{ x } 1 + \frac{1}{2} \text{ x } \frac{1}{2} + -\left(\frac{1}{2}\right) \text{ x } \frac{1}{2} + 0 = 0$
donc le point appartient au plan. J appartient au plan et (FJ) perpendiculaire au plan, donc J est bien le projeté orthogonal de F sur (AMN).

5) Pour le tétraèdre, on prend comme base AMN et comme hauteur [F,J], d'où

(% i34) VT :1/3*Aire*norme2(F,J) ;

$(VT)\quad \frac{2}{3}$

Pour la pyramide, base carrée BCGF et hauteur associée [B,M] (propriété d'un cube).

(% i35) VP :1/3*norme2(B,C)ˆ 2*norme2(B,M) ;

$(VP)\quad \frac{1}{3}$

On a bien Volume Tétraèdre = 2* Volume Pyramide