BACCALAURÉAT 2025 MÉTROPOLE S SPÉCIALITÉ
REMPLACEMENT J2 – CORRECTION DE L'EXERCICE 2

La correction de cet exercice montre l'utilisation du package `geomana3d.mac` qui fournit des commandes permettant la résolution par les étudiants des exercices de géométrie analytique en 3D des programmes du lycée.

On charge le paquetage :

```
-->     load( geomana3d.mac )$
```

La commande info_ package_ geom3d() donne les informations sur ce package.

Enoncé de l'exercice (Source : Annales de l'APMEP)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

On considère les points

$$A(4 ; -1 ; 3), \quad B(-1 ; 1 ; -2), \quad C(0 ; 4 ; 5) \text{ et } D(-3 ; -4 ; 6).$$

1. **a.** Vérifier que les points A, B, C ne sont pas alignés.

   On admet qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $29x + 30y - 17z = 35$.

   b. Les points A, B, C, D sont-ils coplanaires ? Justifier.

On admet que lorsque quatre points ne sont pas coplanaires, il existe un unique point situé à égale distance de ces quatre points.

L'objectif de cet exercice est de déterminer le point H se situant à égale distance des quatre points A, B, C, D.

On définit le plan médiateur d'un segment comme le plan passant par le milieu de ce segment et orthogonal à la droite portant ce segment. C'est l'ensemble des points équidistants des extrémités de ce segment.

2. Soit P_1 le plan médiateur du segment [AB].

   a. Déterminer les coordonnées du milieu du segment [AB].

   b. En déduire qu'une équation cartésienne de P_1 est : $5x - 2y + 5z = 10$.

3. On note P_2 le plan médiateur du segment [CD].

   a. Soit M un point du plan P_2 de coordonnées $(x ; y ; z)$.
   Exprimer MC^2 et MD^2 en fonction des coordonnées de M.
   En déduire qu'une équation cartésienne du plan P_2 est : $-3x - 8y + z = 10$.

   b. Justifier que les plans P_1 et P_2 sont sécants.

4. Soit Δ la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{rcr} x & = & -2 - 1{,}9t \\ y & = & t \\ z & = & 4 + 2{,}3t \end{array}\right. \quad \text{où } t \in \mathbb{R}$$

   Démontrer que Δ est la droite d'intersection de P_1 et P_2.

On note P_3 le plan médiateur du segment [AC].

On admet qu'une équation cartésienne du plan P_3 est : $8x - 10y - 4z = -15$.

5. Démontrer que la droite Δ et le plan P_3 sont sécants.

6. Justifier que le point d'intersection entre Δ et P_3 est le point H.

Résolution avec wxMaxima et le package geomana3d.mac

Question 1) On définit les points puis on vérifie que les vecteurs AB et AC ne sont pas colinéaires

(% i5) A :[4,-1,3] ;B :[-1,1,-2] ;C :[0,4,5] ;D :[-3,-4,6] ;

(A) $[4,-1,3]$

(B) $[-1,1,-2]$

(C) $[0,4,5]$

(D) $[-3,-4,6]$

(% i7) B-A ;C-A ;

$(\%o6)$ $[-5,2,-5]$

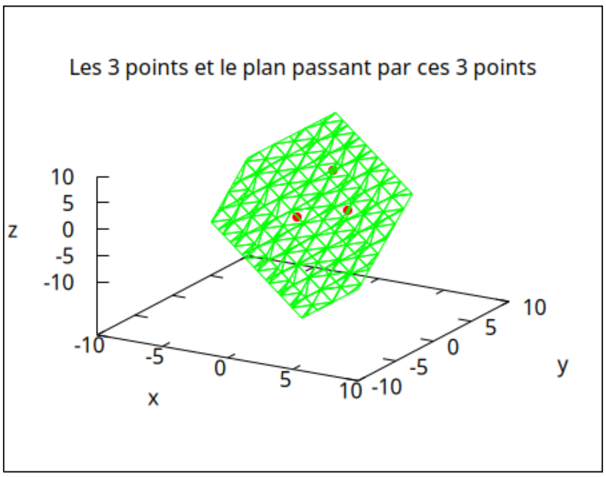
$(\%o7)$ $[-4,5,2]$

(% i8) is_colineaire(B-A,C-A)$

Pour savoir si deux vecteurs sont colinéaires, on cherche si leurs coordonnées sont proportionnelles.
Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

(% i9) is_plan(A,B,C)$

Les 3 points $[4,-1,3]$, $[-1,1,-2]$ et $[0,4,5]$ forment bien un plan.
En effet, les trois points ne sont pas alignés. Pour le démontrer, on peut définir deux vecteurs directeurs à partir des 3 points et vérifier qu'ils ne sont pas colinéaires.
Vecteur normal au plan : $[29,30,-17]$
Equation du plan : $-(17z)+30y+29x-35=0$



On utilise une macro qui renvoie une équation du plan, puis on teste si D appartient à ce plan

(% i10) eqP :equation_plan(A,B,C)$

Les 3 points $[4,-1,3]$, $[-1,1,-2]$ et $[0,4,5]$ forment bien un plan.
Un vecteur normal au plan est : $[29,30,-17]$
Une équation du plan est : $-(17z)+30y+29x-35=0$

(% i11) is_point_plan_eq(D,eqP)$

On teste si les coordonnées du point vérifient l'équation du plan. 29 x -3 + 30 x -4 + -17 x 6 + -35 = -344
Le point n'appartient pas au plan.
Donc les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

Question 2) Le plan médiateur passe par I, milieu de [A,B] et a pour vecteur normal le vecteur AB.

(% i12) I :(A+B)/2;
(I) $\left[\frac{3}{2},0,\frac{1}{2}\right]$

(% i13) eqP1 :equation_plan2(B-A,I)$

Un plan a pour équation de manière générale ax+by+cz+d=0
Les coordonnées du vecteur normal donnent respectivement les coefficients de x, y et z
On trouve d en résolvant l'équation obtenue en remplaçant x, y et z par les coordonnées du point.
Valeur calculée de la constante d : 10
Une équation du plan défini par ce vecteur normal et ce point est donc : $-(5z)+2y-5x+10=0$
Cette équation est identique à celle proposée (facteur -1).

Question 3) On utilise la macro norme qui donne la distance entre 2 points

(% i14) M :[x,y,z];
(M) $[x,y,z]$

(% i15) norme(M,C)$

Longueur du segment : $\sqrt{(5-z)^2+(4-y)^2+x^2}$

(% i16) norme(M,D)$

Longueur du segment : $\sqrt{(6-z)^2+(-y-4)^2+(-x-3)^2}$
On utilise norme2 qui renvoie ce résultat sans commentaire et on calcule le carré des distances

(% i17) d1 :expand(norme2(M,C)^ 2);
$(d1)$ $z^2-10z+y^2-8y+x^2+41$

(% i18) d2 :expand(norme2(M,D)^ 2);
$(d2)$ $z^2-12z+y^2+8y+x^2+6x+61$
M appartient à P2 si et seulement si MC=MD, soit d1-d2=0 après avoir élevé au carré

(% i19) d1-d2=0;
(%o19) $2z-16y-6x-20=0$

(% i20) expand((d1-d2=0)/2);
(%o20) $z-8y-3x-10=0$
On obtient bien l'équation cherchée à un facteur 2 qui apparait quand l'on simplifie.

(% i21) eqP2 :d1-d2=0;
(eqP2) $2z-16y-6x-20=0$
On cherche l'intersection des deux plans P1 et P2 en résolvant le système d'équations

(% i22) solve([eqP1,eqP2],[x,y,z]);
(%o22) $\left[\left[x=-\left(\frac{19\%r1-30}{23}\right), y=\frac{10\%r1-40}{23}, z=\%r1\right]\right]$
On reconnait une équation paramétrique de droite, ce qui prouve que P1 et P2 sont sécants. Autre méthode : regardons si les vecteurs normaux à ces deux plans sont colinéaires.P1 a pour vecteur normal AB et P2 a pour vecteur normal CD

(% i24) B-A ;D-C;
(%o23) $[-5,2,-5]$

(%o24) $[-3,-8,1]$

(% i25) is_colineaire(B-A,D-C)$

Pour savoir si deux vecteurs sont colinéaires, on cherche si leurs coordonnées sont proportionnelles.
Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.
Les vecteur normaux n'étant pas colinéaires, les plans sont non parallèles et donc sécants. Question 4) On commence par définir la droite

(% i26) eqdelta :[x=-2-1.9*t,y=t,z=4+2.3*t,t];
(eqdelta) $[x=-(1.9t)-2, y=t, z=2.3t+4, t]$
Générons deux points de cette droite et vérifions qu'ils appartiennent à P1 et P2 :

(% i28) X :point_droite(eqdelta,0) ;Y :point_droite(eqdelta,1);

Le point de la droite ainsi défini a pour coordonnées : $[-2,0,4]$

(X) $[-2,0,4]$
Le point de la droite ainsi défini a pour coordonnées : $[-3.9,1,6.3]$

(Y) $[-3.9,1,6.3]$

(% i29) is_point_plan_eq(X,eqP1)$

On teste si les coordonnées du point vérifient l'équation du plan. -5 x $-2+2$ x $0+-5$ x $4+10=0$
donc le point appartient au plan.

(% i30) is_point_plan_eq(X,eqP2)$

On teste si les coordonnées du point vérifient l'équation du plan. -6 x $-2+-16$ x $0+2$ x 4

$+ -20 = 0$
donc le point appartient au plan.

(% i31) is_point_plan_eq(Y,eqP1)$

On teste si les coordonnées du point vérifient l'équation du plan. -5 x -3.9 + 2 x 1 + -5 x 6.3 + 10 = 0.0
donc le point appartient au plan.

(% i32) is_point_plan_eq(Y,eqP2)$

On teste si les coordonnées du point vérifient l'équation du plan. -6 x -3.9 + -16 x 1 + 2 x 6.3 + -20 = 0.0
donc le point appartient au plan.
Sachant que les 2 plans se coupent selon une droite, et comme deux points de deltaappartiennent à ces deux plans, on en déduit bien que delta est la droite d'intersection. Autre méthode : on génère un point quelconque de delta de paramètre t0, et on vérifie qu'ilappartient au deux plans :

(% i33) Z :point_droite(eqdelta,t0) ;

Le point de la droite ainsi défini a pour coordonnées : $[-(1.9t0)-2,t0,2.3t0+4]$

(Z) $[-(1.9t0)-2,t0,2.3t0+4]$

(% i34) is_point_plan_eq(Z,eqP1)$

On teste si les coordonnées du point vérifient l'équation du plan. -5 x $-(1.9t0)-2$ + 2 x t0 + -5 x $2.3t0+4$ + 10 = $-(5(2.3t0+4))+2t0-5(-(1.9t0)-2)+10$
donc le point appartient au plan.

(% i35) is_point_plan_eq(Z,eqP2)$

On teste si les coordonnées du point vérifient l'équation du plan. -6 x $-(1.9t0)-2$ + -16 x t0 + 2 x $2.3t0+4$ + -20 = $2(2.3t0+4)-16t0-6(-(1.9t0)-2)-20$
donc le point appartient au plan.
Vérifions pour l'équation du plan médiateur (donnée par le texte, donc inutile pour le bac...)

(% i36) eqP3 :equation_plan2(C-A,(A+C)/2)$

Un plan a pour équation de manière générale ax+by+cz+d=0
Les coordonnées du vecteur normal donnent respectivement les coefficients de x, y et z
On trouve d en résolvant l'équation obtenue en remplaçant x, y et z par les coordonnées du point.
Valeur calculée de la constante d : $-\left(\frac{15}{2}\right)$
Une équation du plan défini par ce vecteur normal et ce point est donc : $2z+5y-4x-\frac{15}{2}=0$

(% i37) compare_equation_plan(eqP3, 8*x-10*y-4*z+15=0)$

Pour savoir si ces deux équations correspondent à un même plan,

on cherche si les deux équations sont proportionnnelles (coefficients proportionnels)
Plan 1 normalisé : $-\left(\frac{4z+10y-8x-15}{8}\right)$
Plan 2 normalisé : $-\left(\frac{4z+10y-8x-15}{8}\right)$
On a donc vérifié que l'équation proposée est proportionnelle à celle obtenue par Maxima. Question 5) b) On utilise la macro intersection droite/plan

(% i38) eqP3;

(%o38) $2z+5y-4x-\frac{15}{2}=0$

(% i39) eqdelta;

(%o39) $[x=-(1.9t)-2, y=t, z=2.3t+4, t]$

(% i40) H0 :intersection_plan_droite(eqdelta,eqP3)$
$rat: replaced 1.9 by 19/10 = 1.9 rat: replaced -2.3 by -23/10 = -2.3$
On résout le système d'équations formé par les équations de la droite et celle du plan.
Coordonnées du point d'intersection : $\left[x=-\left(\frac{365}{344}\right), y=-\left(\frac{85}{172}\right), z=\frac{985}{344}\right]$
Valeur du paramètre $t=-\left(\frac{85}{172}\right)$
On a donc montré que delta et P3 se coupent bien en un point. Autre méthode : sans calcul explicite de H, on compare un vecteur directeur de delta et unvecteur normal à P3 :

(% i41) udelta :vecteur_directeur_droite(eqdelta)$

Les coefficients devant le paramètre de la droite donnent par lecture un vecteur directeur.
Un vecteur directeur de la droite a pour coordonnées $[-1.9, 1, 2.3]$
Le vecteur AC est normal à P3 par définition (se calcule par C-A).

(% i42) produit_scalaire(C-A,udelta)$

Si u(x,y,z) et v(x',y',z') alors le produit scalaire est égal à xx'+yy'+zz'
Le produit scalaire des deux vecteurs est égal à 17.2
Ces vecteurs n'étant pas colinéaires, la droite et le plan ne sont pas parallèles donc sont sécants.

(% i43) H0;

(%o43) $\left[-\left(\frac{365}{344}\right), -\left(\frac{85}{172}\right), \frac{985}{344}\right]$

(% i44) norme2(A,H0)^ 2;

(%o44) $\frac{1531783}{59168}$

(% i45) norme2(B,H0)^ 2;

(%o45) $\frac{1531783}{59168}$

(% i46) norme2(C,H0)^ 2;

(%o46) $\frac{1531783}{59168}$

(% i47) norme2(D,H0)^ 2 ;

(%o47) $\frac{1531783}{59168}$

On a vérifié que H0, intersection de delta et de P3, est à équidistance de A, B, C, Ddonc il s'agit bien du point H dont les coordonnées sont

(% i48) H :H0 ;

(H) $\left[-\left(\frac{365}{344}\right),-\left(\frac{85}{172}\right),\frac{985}{344}\right]$

Géométriquement, on peut dire aussi que H appartient à P1, P2 et P3 (par définition des plans-médiateurs et de celle de H). H appartient donc à delta, et donc est l'intersection de delta et de P3.