Baccalauréat 2025 Métropole J2 S spécialité
Correction de l'exercice 2

La correction de cet exercice montre l'utilisation du package `geomana3d.mac` qui fournit des commandes permettant la résolution par les étudiants des exercices de géométrie analytique en 3D des programmes du lycée.

On charge le paquetage :

```
-->      load( geomana3d.mac )$
```

La commande info_ package_ geom3d() donne les informations sur ce package.

Enoncé de l'exercice (Source : Annales de l'APMEP)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. On considère :

- les points $\text{A}(-1 ; 2 ; 1)$, $\text{B}(1 ; -1 ; 2)$ et $\text{C}(1 ; 1 ; 1)$;
- la droite d dont une représentation paramétrique est donnée par :

$$d : \left\{\begin{array}{lcl} x & = & \frac{3}{2}+2t \\ y & = & 2+t \\ z & = & 3-t \end{array}\right. \quad \text{avec } t \in \mathbb{R};$$

- la droite d' dont une représentation paramétrique est donnée par :

$$d : \left\{\begin{array}{lcr} x & = & s \\ y & = & \frac{3}{2}+s \\ z & = & 3-2s \end{array}\right. \quad \text{avec } s \in \mathbb{R};$$

Partie A

1. Montrer que les droites d et d' sont sécantes au point $\text{S}\left(-\frac{1}{2} ; 1 ; 4\right)$.

2. **a.** Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC)

b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est :

$$x+2y+4z-7=0.$$

3. Démontrer que les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.

4. **a.** Démontrer que le point $\text{H}(-1 ; 0 ; 2)$ est le projeté orthogonal de S sur le plan (ABC)

b. En déduire qu'il n'existe aucun point M du plan (ABC) tel que $\text{S}M < \frac{\sqrt{21}}{2}$.

Partie B

On considère un point M appartenant au segment [CS]. On a donc $\overrightarrow{CM} = k\overrightarrow{CS}$ avec k réel de l'intervalle $[0\,;\,1]$.

1. Déterminer les coordonnées du point M en fonction de k.
2. Existe-t-il un point M sur le segment [CS] tel que le triangle (MAB) soit rectangle en M ?

Résolution avec wxMaxima et le package geomana3d.mac

Définissons les objets à manipuler dans cet exercice :

(% i4) A :[-1,2,1] ;B :[1,-1,2] ;C :[1,1,1] ;

(A) $[-1,2,1]$

(B) $[1,-1,2]$

(C) $[1,1,1]$

(% i6) eqd :[x=3/2+2*t,y=2+t,z=3-t,t] ;eqdp :[x=s,y=3/2+s,z=3-2*s,s] ;

(eqd) $\left[x=2t+\frac{3}{2}, y=t+2, z=3-t, t\right]$

$(eqdp)$ $\left[x=s, y=s+\frac{3}{2}, z=3-2s, s\right]$

1 Partie A

1) On cherche l'intersection de ces deux droites

(% i7) S :intersection_droite_droite(eqd,eqdp)$

Pour savoir si deux droites de l'espace sont sécantes, on essaye de résoudre le système
obtenu en égalant les x, y et z tirés des équations paramétriques
avec comme inconnus les deux paramètres. Si le sytème a une solution alors il existe
un point d'interserction que l'on obtient en remplaçant les paramètres par leurs valeurs.
Si le système n'a pas de solution, alors les deux droites ne sont pas sécantes.

——— $solve : dependentequationseliminated : (1)$

Les deux droites sont sécantes au point : $\left[-\left(\frac{1}{2}\right), 1, 4\right]$

Valeurs des paramètres : $t = -1$ et $s = -\left(\frac{1}{2}\right)$

Autre méthode : vérifions que S appartient à chacune des droites

(% i8) is_point_droite(S,eqd)$

On cherche s'il existe une valeur du paramètre pour lequel les équations paramétriques donnent

les coordonnées du point, en résolvant le système linéaire correspondant.

$solve : dependentequationseliminated : (32)$

Le système admet une solution pour $t = -1$

donc le point $\left[-\left(\frac{1}{2}\right), 1, 4\right]$ appartient à la droite.

(% i9) is_point_droite(S,eqdp)$

On cherche s'il existe une valeur du paramètre pour lequel les équations paramétriques donnent

les coordonnées du point, en résolvant le système linéaire correspondant.

$solve: dependentequationseliminated: (32)$

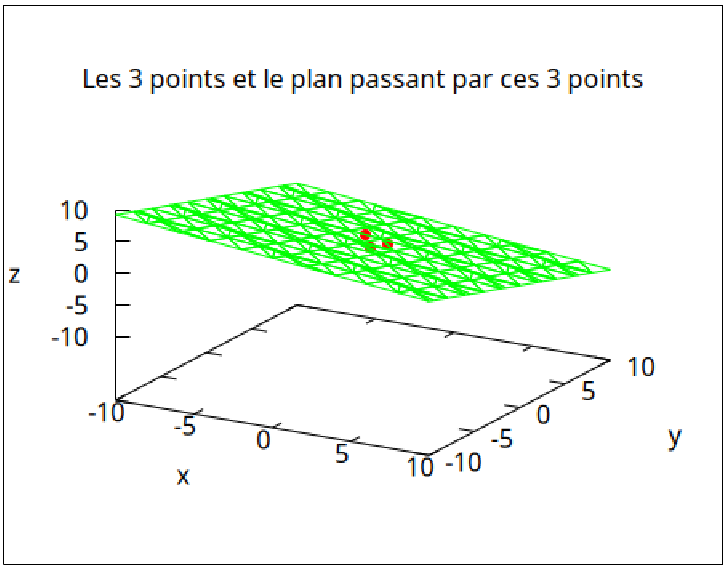
Le système admet une solution pour $s = -\left(\frac{1}{2}\right)$

donc le point $\left[-\left(\frac{1}{2}\right), 1, 4\right]$ appartient à la droite. On en conclut que les deux droites d et d' sont bien sécantes en S.

2) a) vérifions que ABC forment un plan (non demandé dans l'exercice)

(% i10) is_plan(A,B,C)$

Les 3 points $[-1, 2, 1]$, $[1, -1, 2]$ et $[1, 1, 1]$ forment bien un plan.
En effet, les trois points ne sont pas alignés. Pour le démontrer, on peut définir
deux vecteurs directeurs à partir des 3 points et vérifier qu'ils ne sont pas colinéaires.
Vecteur normal au plan : $[1, 2, 4]$
Equation du plan : $4z + 2y + x - 7 = 0$



La commande précédente donne bien n comme vecteur normal à ce plan.

(% i11) n :[1,2,4];
(n) $[1, 2, 4]$ On vérifie que n est bien orthogonal aux vecteurs AB et AC directeurs du plan

(% i12) produit_scalaire(n,B-A)$

Si u(x,y,z) et v(x',y',z') alors le produit scalaire est égal à xx'+yy'+zz'
Le produit scalaire des deux vecteurs est égal à 0

(% i13) produit_scalaire(n,C-A)$

Si u(x,y,z) et v(x',y',z') alors le produit scalaire est égal à xx'+yy'+zz'
Le produit scalaire des deux vecteurs est égal à 0

2) b) Connaissant un vecteur normal et un point du plan, on a donc

(% i14) eqP :equation_plan2(n,A)$

Un plan a pour équation de manière générale ax+by+cz+d=0
Les coordonnées du vecteur normal donnent respectivement les coefficients de x, y et z
On trouve d en résolvant l'équation obtenue en remplaçant x, y et z par les coordonnées du point.
Valeur calculée de la constante d : -7
Une équation du plan défini par ce vecteur normal et ce point est donc : $4z+2y+x-7=0$ 3) On montre que S n'appartient pas au plan ABC dont on connait une équation

(% i15) is_point_plan_eq(S,eqP)$

On teste si les coordonnées du point vérifient l'équation du plan.

$1 \text{ x } -\left(\frac{1}{2}\right) + 2 \text{ x } 1 + 4 \text{ x } 4 + -7 = \frac{21}{2}$
Le point n'appartient pas au plan.

4) a) On peut utiliser une macro du package

(% i16) H :proj_ortho(S,eqP)$

On trouve un système d'équations paramétriques de la droite passant par le point dirigée par un vecteur normal au plan puis on cherche le point d'intersection de cette droite avec le plan.
Equation de la droite perpendiculaire au plan passant par le point : $\left[x=t-\frac{1}{2}, y=2t+1, z=4t+4, t\right]$
Coordonnées du point d'intersection : $[-1, 0, 2]$

Autre méthode : on prouve que le vecteur SH est colinéaire à n et que H appartient au plan ABC

(% i17) is_colineaire(n,H-S)$

Pour savoir si deux vecteurs sont colinéaires, on cherche si leurs coordonnées sont proportionnelles. Ces deux vecteurs sont colinéaires.

On a en effet : $[1, 2, 4] = -2 \text{ x } \left[-\left(\frac{1}{2}\right), -1, -2\right]$

(% i18) is_point_plan_eq(H,eqP)$

On teste si les coordonnées du point vérifient l'équation du plan.

$1 \text{ x } -1 + 2 \text{ x } 0 + 4 \text{ x } 2 + -7 = 0$
donc le point appartient au plan.

4) b) On calcule la distance SH, qui est la plus courte possible entre S et un point du plan

(% i19) norme(S,H)$

Longueur du segment : $\frac{\sqrt{21}}{2}$
On en conclut aisément que tout autre point M vérifie SM>=sqrt(21)/2

2 Partie B

1) De la définition, on a l'égalité entre vecteurs : OM=OC+k.CS qui donne les coordonnées de M

(% i20) M :C+k*(S-C) ;

(M) $\left[1-\frac{3k}{2},1,3k+1\right]$

2) On cherche k tel que MA^2+MB^2=AB^2

(% i21) solve(norme(M,A)^ 2+norme(M,B)^ 2=norme(A,B)^ 2,k) ;

Longueur du segment : $\sqrt{\left(\frac{3k}{2}-2\right)^2+9k^2+1}$

Longueur du segment : $\sqrt{\frac{9k^2}{4}+(1-3k)^2+4}$

Longueur du segment : $\sqrt{14}$

(%o21) $\left[k=-\left(\frac{2\sqrt{14}-4}{15}\right),k=\frac{2\sqrt{14}+4}{15}\right]$

(% i22) float(%) ;

(%o22) $[k=-0.23222098490319218,k=0.7655543182365254]$

Pour que le point appartienne au segment, on doit avoir 0=<k=<1, ce qui est vérifié pour la deuxième valeur et permet de dire qu'il existe bien un point M vérifiant cette condition.