BACCALAURÉAT 2025 NOUVELLE CALÉDONIE S SPÉCIALITÉ J1 – CORRECTION DE L'EXERCICE 2

La correction de cet exercice montre l'utilisation du package `geomana3d.mac` qui fournit des commandes permettant la résolution par les étudiants des exercices de géométrie analytique en 3D des programmes du lycée.

On charge le paquetage :

```
-->      load( geomana3d.mac )$
```

La commande info_ package_ geom3d() donne les informations sur ce package.

Enoncé de l'exercice (Source : Annales de l'APMEP)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$, on considère les points :

$$A(4\,;\,-4\,;\,4),\quad B(5\,;\,-3\,;\,2),\quad C(6\,;\,-2;\,;\,3),\quad D(5\,;\,1\,;\,1)$$

1. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en B.

2. Justifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est :

$$x-y-8=0.$$

3. On note d la droite passant par le point D et orthogonale au plan (ABC).

- **a.** Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.
- **b.** On note H le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).
  Déterminer les coordonnées du point H.
- **c.** Montrer que $\mathrm{DH} = 2\sqrt{2}$.

4.
- **a.** Montrer que le volume de la pyramide ABCD est égal à 2.
  On rappelle que le volume V d'une pyramide se calcule à l'aide de la formule :

  $$V=\frac{1}{3}\times\mathcal{B}\times h$$

  où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base de la pyramide et h la hauteur correspondante.
- **b.** On admet que l'aire du triangle BCD est égale à $\dfrac{\sqrt{42}}{2}$.
  En déduire la valeur exacte de la distance du point A au plan (BCD).

Résolution avec wxMaxima et le package geomana3d.mac

Définissons les points de l'énoncé

```
(%i5)   A :[4,-4,4] ;B :[5,-3,2] ;C :[6,-2,3] ;D :[5,1,1] ;
```

$(A)\quad [4,-4,4]$

$(B)\quad [5,-3,2]$

$(C)\quad [6,-2,3]$

$(D)\quad [5,1,1]$

1 Question 1

On vérifie que les vecteurs BA et BC sont orthogonaux avec le produit scalaire

(% i6) produit_scalaire(A-B,C-B)$

Si u(x,y,z) et v(x',y',z') alors le produit scalaire est égal à xx'+yy'+zz'
Le produit scalaire des deux vecteurs est égal à 0 donc le triangle ABC est rectangle en B. On pourrait aussi regarder les longueurs du triangle

(% i7) c1 :norme(B,A)$

Longueur du segment : $\sqrt{6}$

(% i8) c2 :norme(B,C)$

Longueur du segment : $\sqrt{3}$

(% i9) c3 :norme(A,C)$

Longueur du segment : 3

(% i11) c1^2+c2^2;c3^2;
(%o10) 9

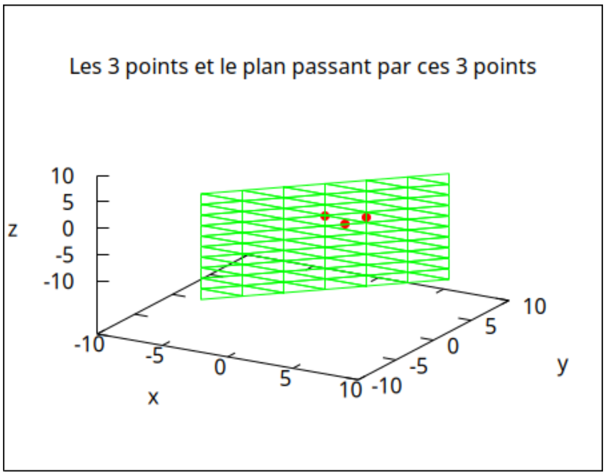
(%o11) 9
La réciproque du théorème de Pythagore prouve le résultat demandé.

2 Question 2

Les points A, B,et C forment un plan car non alignés d'après la question précédente. On peut le vérifier :

(% i12) is_plan(A,B,C)$

Les 3 points $[4,-4,4]$, $[5,-3,2]$ et $[6,-2,3]$ forment bien un plan.
En effet, les trois points ne sont pas alignés. Pour le démontrer, on peut définir deux vecteurs directeurs à partir des 3 points et vérifier qu'ils ne sont pas colinéaires.
Vecteur normal au plan : $[3,-3,0]$
Equation du plan : $-(3y)+3x-24=0$



Méthode 1 : on vérifie que A, B et C vérifient l'équation donnée du plan

(% i13) eqP :x-y-8=0;
(eqP) $-y+x-8=0$

(% i14) is_point_plan_eq(A,eqP)$

On teste si les coordonnées du point vérifient l'équation du plan. 1 x $4 + -1$ x $-4 + 0$ x $4 + -8 = 0$
donc le point appartient au plan.

(% i15) is_point_plan_eq(B,eqP)$

On teste si les coordonnées du point vérifient l'équation du plan. 1 x $5 + -1$ x $-3 + 0$ x $2 + -8 = 0$
donc le point appartient au plan.

(% i16) is_point_plan_eq(C,eqP)$

On teste si les coordonnées du point vérifient l'équation du plan. 1 x $6 + -1$ x $-2 + 0$ x $3 + -8 = 0$
donc le point appartient au plan.
donc l'équation donnée est bien celle du plan ABC. On peut aussi trouver une équation du plan :

(% i17) eqT :equation_plan(A,B,C)$

Les 3 points $[4,-4,4]$, $[5,-3,2]$ et $[6,-2,3]$ forment bien un plan.
Un vecteur normal au plan est : $[3,-3,0]$
Une équation du plan est : $-(3y)+3x-24=0$
Il reste juste à montrer que l'équation obtenue est équivalente à celle donnée

(% i18) expand(eqT/3);
$(\%o18)$ $-y+x-8=0$
ayant remarqué qu'il y a un facteur 3 de proportionnalité.

(% i19) compare_equation_plan(eqT, eqP);

Pour savoir si ces deux équations correspondent à un même plan,
on cherche si les deux équations sont proportionnnelles (coefficients proportionnels)
Plan 1 normalisé : $-y+x-8$
Plan 2 normalisé : $-y+x-8$

(%o19) Les deux équations correspondent au même plan (équations proportionnelles).

3 Question 3

On trouve un vecteur normal à ABC qui dirige donc cette droite passant par D :

(% i20) n :normal(eqP)$

Les coordonnées d'un vecteur normal sont les coefficients de x, y et z dans l'équation du plan.

Un vecteur normal au plan est $[1,-1,0]$

(% i21) eqD :equation_droite(D,n,t)$

Equations paramétriques de la droite : $[x=t+5, y=1-t, z=1, t]$
H est d'après la construction l'intersection de la droite d et du plan ABC :

(% i22) H :intersection_plan_droite(eqD,eqP)$

On résout le système d'équations formé par les équations de la droite et celle du plan.
Coordonnées du point d'intersection : $[x=7, y=-1, z=1]$
Valeur du paramètre $t=2$

(% i23) DH :norme(D,H)$

Longueur du segment : $2^{\frac{3}{2}}$

(% i24) DH-2*sqrt(2);
(%o24) 0
On obtient bien la valeur demandée après avoir vérifié l'égalité des deux nombres.

4 Question 4

La base de la pyramide est le triangle rectangle ABC et la hauteur associée est DH, d'où le volume

(% i25) V :1/3*(1/2*norme2(B,A)*norme2(B,C))*DH;
(V) $\frac{\sqrt{2}\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$

(% i26) radcan(V);
(%o26) 2
De même, ce volume se calcule en prenant pour base le BCD et la hauteur associée, qui est la distance de A au plan BCD. On note l cette distance

(% i27) V2 :1/3*(sqrt(42)/2)*l;

(V2) $\frac{\sqrt{42}\, l}{6}$

Ces deux expressions d'un même volume sont égales, d'où une équation en l :

(% i28) sol :solve(V=V2,l);

(sol) $\left[l=\frac{2^{\frac{3}{2}}\sqrt{3}\sqrt{6}}{\sqrt{42}} \right]$

(% i29) l :rhs(sol[1]);

(l) $\frac{2^{\frac{3}{2}}\sqrt{3}\sqrt{6}}{\sqrt{42}}$

(% i30) radcan(l);

(%o30) $\frac{2^{\frac{3}{2}}\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

(% i31) float(%);

(%o31) 1.851640199545103