BACCALAURÉAT 2025 POLYNESIE J1 S SPÉCIALITÉ
CORRECTION DE L'EXERCICE 2

La correction de cet exercice montre l'utilisation du package `geomana3d.mac` qui fournit des commandes permettant la résolution par les étudiants des exercices de géométrie analytique en 3D des programmes du lycée.

On charge le paquetage :

```
-->     load( geomana3d.mac )$
```

La commande info_ package_ geom3d() donne les informations sur ce package.

Enoncé de l'exercice (Source : Annales de l'APMEP)

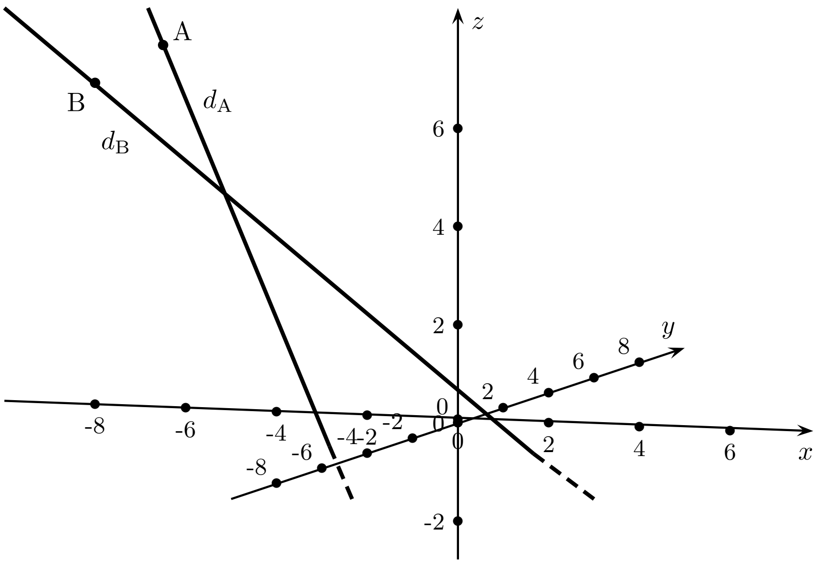
Exercice 2 — 5 points

Deux avions sont en approche d'un aéroport.

On munit l'espace d'un repère orthonormé $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ dont l'origine O est le pied de la tour de contrôle, et le sol est le plan P_0 d'équation $z = 0$.

L'unité des axes correspond à 1 km.

On modélise les avions par des points.



L'avion Alpha transmet à la tour sa position en $A(-7 ; 1 ; 7)$ et sa trajectoire est dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix}$.

L'avion Bêta transmet une trajectoire définie par la droite d_B passant par le point B dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -11+5t \\ y &=& -5+\ t \\ z &=& 11-4t \end{array}\right. \quad \text{où } t \text{ décrit } \mathbb{R}$$

1. S'il ne dévie pas de sa trajectoire, déterminer les coordonnées du point S en lequel l'avion Bêta touchera le sol.

2. **a.** Déterminer une représentation paramétrique de la droite d_A caractérisant la trajectoire de l'avion Alpha.

   b. Les deux avions peuvent-ils entrer en collision ?

3. **a.** Démontrer que l'avion Alpha passe par la position E$(-3\ ;\ -1\ ;\ 1)$.

   b. Justifier qu'une équation cartésienne du plan P_E passant par E et perpendiculaire à la droite d_A est : $2x - y - 3z + 8 = 0$.

   c. Vérifier que le point F$(-1\ ;\ -3\ ;\ 3)$ est le point d'intersection du plan P_E et de la droite d_B.

   d. Calculer la valeur exacte de la distance EF, puis vérifier que cela correspond à une distance de 3 464 m, à 1 m près.

4. La réglementation aérienne stipule que deux avions en approche doivent être à tout instant à au moins 3 milles nautiques l'un de l'autre (1 mille nautique vaut 1 852 m).

   Si les avions Alpha et Bêta sont respectivement en E et F au même instant, leur distance de sécurité est-elle respectée ?

Résolution avec wxMaxima et le package geomana3d.mac

On commence par définir les différents objets donnés par l'énoncé :

(% i5) eqP0 :z=0 ;A :[-7,1,7] ;u :[2,-1,-3] ;eqdB :[x=-11+5*t,y=-5+t,z=11-4*t,t] ;

(eqP0) $z=0$

(A) $[-7,1,7]$

(u) $[2,-1,-3]$

(eqdB) $[x=5t-11, y=t-5, z=11-4t, t]$

1. On cherche l'intersection de la droite dB avec le plan P0, en utilisant intersection_plan_droite(d,eq) et on l'affecte au point S.

(% i6) S :intersection_plan_droite(eqdB,eqP0) ;

On résout le système d'équations formé par les équations de la droite et celle du plan. Coordonnées du point d'intersection :

$$\left[x=\frac{11}{4}, y=-\left(\frac{9}{4}\right), z=0\right]$$

Valeur du paramètre

$$t=\frac{11}{4}$$

(S) $\left[\frac{11}{4}, -\left(\frac{9}{4}\right), 0\right]$

2. a. Connaissant un point et un vecteur directeur, la commande equation_droite(M,u,t) génère une réprésentation paramétrique de la droite avec le paramètre t , que l'on affecte à eqdA :

(% i7) eqdA :equation_droite(A,u,k)$

Equations paramétriques de la droite :

$$[x=2k-7, y=1-k, z=7-3k, k]$$

2. b. Pour répondre à la question, on cherche si les droites dA et dA sont sécantes :

(% i8) T :intersection_droite_droite(eqdA,eqdB)$

Pour savoir si deux droites de l'espace sont sécantes, on essaye de résoudre le système obtenu en égalant les x, y et z tirés des équations paramétriques avec comme inconnus les deux paramètres. Si le sytème a une solution alors il existe un point d'interserction que l'on obtient en remplaçant les paramètres par leurs valeurs.

Si le système n'a pas de solution, alors les deux droites ne sont pas sécantes.

Il n'existe pas de valeur des paramètres pour lesquels le système a des solutions donc les deux droites ne sont pas sécantes.

On en conclut que les avions ne peuvent pas entrer en collision.

3. a. On cherche si les coordonnées de E vérifient les équations de la droite dA :

(% i9) E :[-3,-1,1]$
(% i10) is_point_droite(E,eqdA)$

On cherche s'il existe une valeur du paramètre pour lequel les équations paramétriques donnent les coordonnées du point, en résolvant le système linéaire correspondant.

solve : dependent equations eliminated : (3 2)

Le système admet une solution pour $k = 2$
donc le point $[-3, -1, 1]$ appartient à la droite. donc l'avion Alpha passe par le point E.

3. b. Le vecteur u est un vecteur normal au plan PE.~Sachant qu'il passe par E, on trouve donc :

(% i11) eqPE :equation_plan2(u,E)$

Un plan a pour équation de manière générale ax+by+cz+d=0

Les coordonnées du vecteur normal donnent respectivement les coefficients de x, y et z

On trouve d en résolvant l'équation obtenue en remplaçant x, y et z par les coordonnées du point.

Valeur calculée de la constante d : 8
Une équation du plan défini par ce vecteur normal et ce point est donc :

$$-(3z)-y+2x+8=0$$

3. c. Connaissant les équations du plan PE et de la droite dB, on résout le sytème d'équations-pour trouver le point d'intersection :

(% i13) eqPE ;eqdB ;

(% o12) $-(3z)-y+2x+8=0$

(% o13) $[x=5t-11, y=t-5, z=11-4t, t]$

(% i14) F :intersection_plan_droite(eqdB,eqPE)$

On résout le système d'équations formé par les équations de la droite et celle du plan.

Coordonnées du point d'intersection :

$$[x=-1, y=-3, z=3]$$

Valeur du paramètre $t=2$

3. d. On calcule la longeur EF :

(% i15) EF :norme(E,F)$

Longueur du segment : $2\sqrt{3}$

(% i16) print(EF= ,float(EF))$

EF= 3.4641016151377544 Cette distance est en km, on la tranforme en m et l'on arrondit :

(% i17) print(EF= ,float(EF)*1000, en m et l'arrondi : ,round(float(EF)*1000), à 1 m près)$

EF= 3464.1016151377544 en m et l'arrondi : 3464 à 1 m près

4. On calcule EF en milles nautiques :

(% i18) print(Distance entre les avions en milles nautiques : ,float(EF*1000/1852), < 3)$

Distance entre les avions en milles nautiques : 1.8704652349555908 < 3

On en conclut que la distance de sécurité n'est pas respectée.

Pour conclure, représentons la situation

(% i88)
```
wxdraw3d(point_size=1,color=red,point_type=7,
xlabel= x ,ylabel= y ,zlabel= z ,grid=true,xaxis=true,yaxis=true,zaxis=true,
xrange=[-10,10],yrange=[-10,10],zrange=[-10,10],
surface_hide=true,nticks=50,adapt_depth=20,
title= figure - exercice 2 ,
label([ A ,-7,1,10],[ S ,11/4,-9/4,-3],[ E ,-4,-1,5],[ F ,-1,-3,6],[ PE ,-8,-5,2]),
color=black,
points([A,S,E,F]),
color=blue,
parametric(-11+5*t,-5+t,11-4*t,t,-10,10),
color=red,
parametric(2*k-7,1-k,7-3*k,k,-10,10),
color=green,
implicit(eqPE,x,-10,10,y,-10,10,z,-10,10)
)$
```

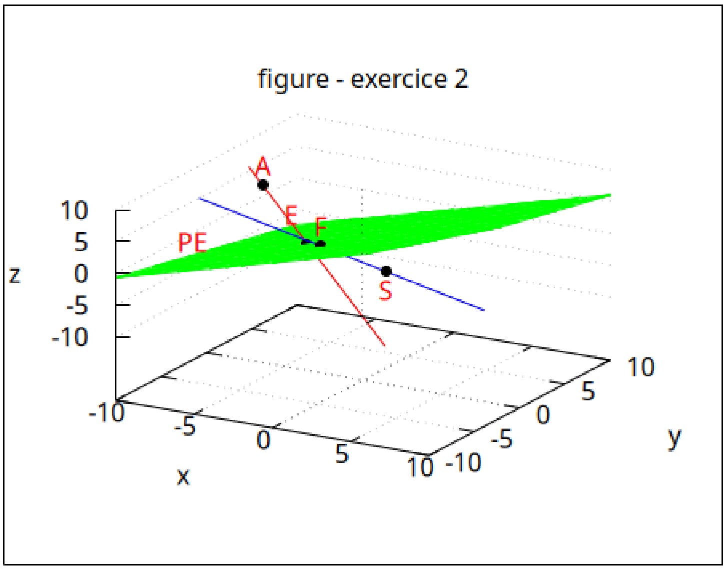


figure - exercice 2
A
E
F
PE
S
z
x
y
10
5
0
-5
-10
-10
-5
0
5
10
-10
-5
0
5
10