BACCALAURÉAT 2025 POLYNESIE J2 S SPÉCIALITÉ
CORRECTION DE L'EXERCICE 3

La correction de cet exercice montre l'utilisation du package `geomana3d.mac` qui fournit des commandes permettant la résolution par les étudiants des exercices de géométrie analytique en 3D des programmes du lycée.

On charge le paquetage :

```
-->     load( geomana3d.mac )$
```

La commande info_ package_ geom3d() donne les informations sur ce package.

Enoncé de l'exercice (Source : Annales de l'APMEP)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$.

On considère les points suivants :

$$A(1\,;3\,;0),\quad B(-1\,;\,4\,;\,5),\quad C(0\,;1\,;0)\quad \text{et}\quad D(-2\,;\,2\,;\,1).$$

1. Montrer que les points A, B et C déterminent un plan.

2. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.

3. Soit Δ la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$.

  a. Démontrer que la droite Δ est orthogonale au plan (ABC).

  b. Justifier que le plan (ABC) admet pour équation cartésienne :

$$2x - y + z + 1 = 0.$$

  c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.

4. On appelle H le point de coordonnées $\left(-\frac{2}{3}\ \frac{4}{3}\,;\,\frac{5}{3}\right)$.
Vérifier que H est le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).

5. On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par$V = \dfrac{1}{3}B \times h$, où B est l'aire d'une base du tétraèdre et h est sa hauteur relative à cette base.

  a. Montrer que DH $= \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

  b. En déduire le volume du tétraèdre ABCD.

6. On considère la droite d de représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1-2k\\ y &=& \quad -3k \\ z &=& 1+\ \ k\end{array}\right. \quad \text{où } k \text{ décrit } \mathbb{R}.$$

La droite d et le plan (ABC) sont-ils sécants ou parallèles ?

Résolution avec wxMaxima et le package geomana3d.mac

On définit les objets de l'exercice :

(% i5) A :[1,3,0] ;B :[-1,4,5] ;C :[0,1,0] ;D :[-2,2,1] ;

(A) $[1,3,0]$

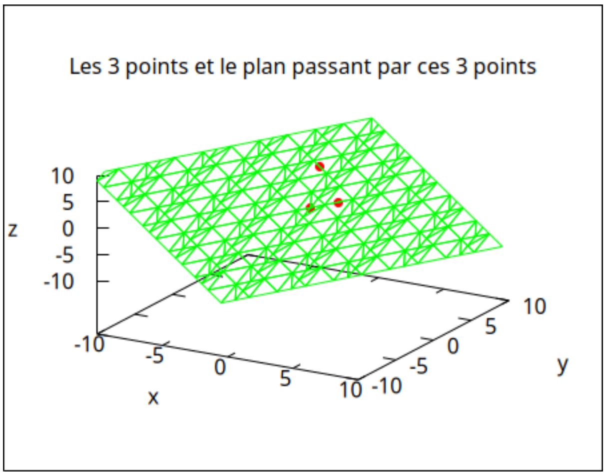
(B) $[-1,4,5]$

(C) $[0,1,0]$

(D) $[-2,2,1]$ 1) Vérifions à l'aide de la macro que A, B et C définisssent un plan

(% i6) is_plan(A,B,C)$

Les 3 points $[1,3,0]$, $[-1,4,5]$ et $[0,1,0]$ forment bien un plan.
En effet, les trois points ne sont pas alignés. Pour le démontrer, on peut définir
deux vecteurs directeurs à partir des 3 points et vérifier qu'ils ne sont pas colinéaires.
Vecteur normal au plan : $[10,-5,5]$
Equation du plan : $5z-5y+10x+5=0$



2) Vérifions la réciproque du théorème de Pythagore

(% i7) norme(A,B)ˆ 2+norme(A,C)ˆ 2 ;

Longueur du segment : $\sqrt{30}$
Longueur du segment : $\sqrt{5}$

$(\%o7)$ 35

(% i8) norme(B,C)ˆ 2 ;

Longueur du segment : $\sqrt{35}$

$(\%o8)$ 35, CQFD

On peut aussi vérifier l'orthogonalité des vecteurs à l'aide du produit scalaire :

(% i9) produit_scalaire(B-A,C-A)$

Si u(x,y,z) et v(x',y',z') alors le produit scalaire est égal à xx'+yy'+zz'
Le produit scalaire des deux vecteurs est égal à 0

3) a) On peut simplement vérifier que le vecteur u est orthogonal aux vecteurs AB et AC

(% i10) u :[2,-1,1];
(u) $[2,-1,1]$

(% i11) produit_scalaire(u,B-A)$

Si u(x,y,z) et v(x',y',z') alors le produit scalaire est égal à xx'+yy'+zz'
Le produit scalaire des deux vecteurs est égal à 0

(% i12) produit_scalaire(u,C-A)$

Si u(x,y,z) et v(x',y',z') alors le produit scalaire est égal à xx'+yy'+zz'
Le produit scalaire des deux vecteurs est égal à 0

3) b) u étant un vecteur normal au plan, on trouve facilement une équation du plan sachant qu'il passe par A.

(% i13) eqP :equation_plan2(u,A)$

Un plan a pour équation de manière générale ax+by+cz+d=0
Les coordonnées du vecteur normal donnent respectivement les coefficients de x, y et z
On trouve d en résolvant l'équation obtenue en remplaçant x, y et z par les coordonnées du point.
Valeur calculée de la constante d : 1
Une équation du plan défini par ce vecteur normal et ce point est donc : $z-y+2x+1=0$

3) c) La macro suivante du package donne une représentation paramétrique :

(% i14) eqD :equation_droite(D,u,t)$

Equations paramétriques de la droite : $[x=2t-2,y=2-t,z=t+1,t]$

4) On peut utiliser une macro du package

(% i15) H :proj_ortho(D,eqP)$

On trouve un système d'équations paramétriques de la droite passant par le point dirigée par un vecteur normal au plan puis on cherche le point d'intersection de cette droite avec le plan.
Equation de la droite perpendiculaire au plan passant par le point : $[x=2t-2,y=2-t,z=t+1,t]$
Coordonnées du point d'intersection : $\left[-\left(\frac{2}{3}\right),\frac{4}{3},\frac{5}{3}\right]$

Sinon, on vérifie que H appartient au plan ABC et que (DH) // u, vecteur normal au plan

(% i16) is_point_plan_eq(H,eqP)$

On teste si les coordonnées du point vérifient l'équation du plan.

$2 \text{ x } -\left(\frac{2}{3}\right)+-1 \text{ x } \frac{4}{3}+1 \text{ x } \frac{5}{3}+1=0$
donc le point appartient au plan.

(% i17) is_colineaire(H-D,u)$

Pour savoir si deux vecteurs sont colinéaires, on cherche si leurs coordonnées sont proportionnelles. Ces deux vecteurs sont colinéaires.
On a en effet : $\left[\frac{4}{3},-\left(\frac{2}{3}\right),\frac{2}{3}\right]=\frac{2}{3} \text{ x } [2,-1,1]$

5) On calcule DH dans un premier temps

(% i18) DH :norme(D,H)$

Longueur du segment : $\frac{2^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{3}}$

Pour trouver la valeur attendue, on fait appel à radcan pour montrer que la différence avec le résultat est 0

(% i19) radcan(DH-2*sqrt(6)/3) ;
(%o19) 0

4) b) Base du tétraèdre : le triangle rectangle ABC, hauteur DH (d'après questions précédentes)

(% i20) V :1/3*DH*(1/2*norme2(A,B)*norme2(A,C)) ;
(V) $\frac{\sqrt{2}\sqrt{5}\sqrt{30}}{3^{\frac{3}{2}}}$

(% i21) rootscontract(V) ;
(%o21) $\frac{10}{3}$

(% i22) float(V) ;
(%o22) 3.333333333333334

6) On définit la droite d, et on utilise la macro d'intersection

(% i24) eqd2 :[x=1-2*k,y=-3*k,z=1+k,k] ;
(eqd2) $[x=1-2k, y=-(3k), z=k+1, k]$

(% i26) intersection_plan_droite(eqd2,eqP)$

On résout le système d'équations formé par les équations de la droite et celle du plan.
La droite et le plan ne sont pas sécants Autre méthode : on trouve un vecteur directeur u2 de la droite d

(% i29) u2 :vecteur_directeur_droite(eqd2)$

Les coefficients devant le paramètre de la droite donnent par lecture un vecteur directeur.
Un vecteur directeur de la droite a pour coordonnées $[-2, -3, 1]$

(% i31) produit_scalaire(u2,u)$

Si u(x,y,z) et v(x',y',z') alors le produit scalaire est égal à xx'+yy'+zz'
Le produit scalaire des deux vecteurs est égal à 0 Un vecteur directeur de d est orthogonal à un vecteur normal du plan donc la droite et le plan sont parallèles, ce qui était prouvé car la droite et le plan ne se coupent pas.