

BACCALAURÉAT 2025 AMÉRIQUE DU NORD S SPÉCIALITÉ
SESSION MAI 2025 – CORRECTION DE L'EXERCICE 4

La correction de cet exercice montre l'utilisation de Maxima pour résoudre cet exercice du baccalauréat S spécialité.

Enoncé de l'exercice (Source : Annales de l'APMEP)

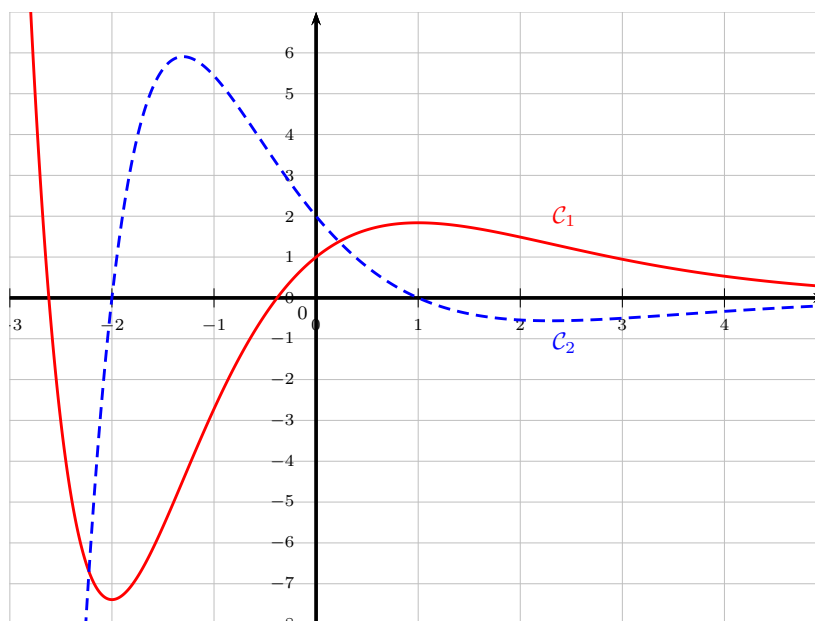
La **partie C** est indépendante des parties **A** et **B**.

Partie A

On donne ci-dessous, dans un repère orthogonal, les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, représentations graphiques de deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. L'une des deux fonctions représentées est la fonction dérivée de l'autre. On les notera g et g' .

On précise également que :

- La courbe $\mathcal{C}_1$ coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0 ; 1)$.
- La courbe $\mathcal{C}_2$ coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0 ; 2)$ et l'axe des abscisses aux points de coordonnées $(-2 ; 0)$ et $(1 ; 0)$.



1. En justifiant, associer à chacune des fonctions g et g' sa représentation graphique.
2. Justifier que l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse 0 est $y = 2x + 1$.

Partie B

On considère (E) l'équation différentielle

$$y + y' = (2x + 3)e^{-x},$$

où y est une fonction de la variable réelle x .

1. Montrer que la fonction f_0 définie pour tout nombre réel x par $f_0(x) = (x^2 + 3x)e^{-x}$ est une solution particulière de l'équation différentielle (E) .
2. Résoudre l'équation différentielle $(E_0) : y + y' = 0$.
3. Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E) .
4. On admet que la fonction g décrite dans la **partie A** est une solution de l'équation différentielle (E) .
Déterminer alors l'expression de la fonction g .
5. Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E) dont la courbe admet exactement deux points d'inflexion.

Partie C

On considère la fonction f définie pour tout nombre réel x par :

$$f(x) = (x^2 + 3x + 2)e^{-x}$$

1. Démontrer que la limite de la fonction f en $+\infty$ est égale à 0.
On admet par ailleurs que la limite de la fonction f en $-\infty$ est égale à $+\infty$.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$.
 - a. Vérifier que, pour tout nombre réel x , $f'(x) = (-x^2 - x + 1)e^{-x}$.
 - b. Déterminer le signe de la fonction dérivée f' sur $\mathbb{R}$ puis en déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3. Expliquer pourquoi la fonction f est positive sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
4. On notera $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On admet que la fonction F définie pour tout nombre réel x par $F(x) = (-x^2 - 5x - 7)e^{-x}$ est une primitive de la fonction f .
Soit α un nombre réel positif.
Déterminer l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$, exprimée en unité d'aire, du domaine du plan délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}_f$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \alpha$.

Résolution avec wxMaxima

1 Partie A

1. C2 négative pour $x < -2$, et C1 décroissante sur cet intervalle C2 positive pour $-2 < x < 1$ et C1 croissante sur cet intervalle C2 négative pour $x > 1$ et C1 décroissante sur cet intervalle donc C1 correspond à la fonction g et C2 à la fonction g' . 2. $g(0)=1$ et $g'(0)=2$.

Equation de la tangente en 0 : $y = g'(0)(x-0) + g(0)$

(% i2) $g0 : 1 ; gp0 : 2 ;$

(g0) 1

(gp0) 2

(% i3) $y = gp0 \cdot (x - 0) + g0;$

(% o3) $y = 2x + 1$

2 Partie B

B 1) On définit f0 et on calcule f0(x)+f0'(x) :

(% i4) $f_0(x) := (x^2 + 3x) \cdot \exp(-x);$

(% o4) $f_0(x) := (x^2 + 3x) \exp(-x)$

(% i5) $f_0(x) + \text{diff}(f_0(x), x);$

(% o5) $\%e^{-x} (2x + 3)$

B 2) la commande ode2 permet de résoudre les équations différentielles

(% i9) $\text{sol} : \text{ode2}(y + \text{diff}(y, x) = 0, y, x);$

(sol) $y = \%e^{-x} \%c$

B 3) Il suffit d'additionner les 2 fonctions précédentes (d'après le cours)

(% i12) $\text{define}(f(x), \text{rhs}(\text{sol}));$

(% o12) $f(x) := \%e^{-x} \%c$

(% i15) $\text{sg}(x) := f(x) + f_0(x);$

(% o15) $sg(x) := f(x) + f_0(x)$

(% i19) $\text{factor}(\text{sg}(x));$

(% o19) $\%e^{-x} (x^2 + 3x + \%c)$

B 4) sachant que g(0)=1 on détermine la constante %c

(% i22) $k : \text{solve}(\text{sg}(0) = 1, \%c);$

(k) $[\%c = 1]$

(% i24) $\text{rhs}(k[1]);$

(% o24) 1

(% i27) $g(x) := \text{subst}(\text{rhs}(k[1]), \%c, \text{sg}(x));$

(% o27) $g(x) := \text{subst}(\text{rhs}(k_1), \%c, \text{sg}(x))$

(% i28) g(x);

(% o28) $%e^{-x}(x^2 + 3x) + %e^{-x}$

(% i29) factor(g(x));

(% o29) $%e^{-x}(x^2 + 3x + 1)$

B 5) on cherche %c sachant que la dérivée seconde s'annule 2 fois exactement

(% i36) print("Expression de la solution générale : sg(x)=",factor(sg(x)))\$

"Expression de la solution générale : sg(x)="

$%e^{-x}(x^2 + 3x + %c)$

(% i42) print("Dérivée seconde de sg(x) : ",factor(diff(sg(x),x,2)))\$

"Dérivée seconde de sg(x) : "

$%e^{-x}(x^2 - x + %c - 4)$

La dérivée seconde s'annule et est du signe du trinome $x^2 - x + %c - 4$. Ce trinome admet deux racines si et seulement si son discriminant est positif :

(% i45) trinome :expand(coeff(diff(sg(x),x,2),exp(-x)));

(trinome) $x^2 - x + %c - 4$

(% i51) delta :coeff(trinome,x)^2-4*coeff(trinome,x^2)*coeff(trinome,x,0);

(delta) $1 - 4(%c - 4)$

(% i52) expand(delta);

(% o52) $17 - 4%c$

(% i53) load(solve_rat_ineq);

(% o53)

"/home/mgosse2/logiciels/maxima-5.49.0/share/solve_rat_ineq/solve_rat_ineq.mac"

(% i59) solve_rat_ineq(delta>0);

(% o59) $\left[\left[%c < \frac{17}{4} \right] \right]$

Les solutions de l'EDO admettant 2 points d'inflexion sont les fonctions dont la constante < 17/4

3 Partie C

(% i60) $f(x) := (x^2 + 3x + 2) \exp(-x);$

(% o60) $f(x) := (x^2 + 3x + 2) \exp(-x)$

C 1) la commande limit donne les réponses (sinon croissance comparée du cours)

(% i62) $\text{'limit}(f(x), x, \text{inf}) = \text{limit}(f(x), x, \text{inf});$

(% o62) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} (x^2 + 3x + 2) = 0$

(% i63) $\text{'limit}(f(x), x, \text{minf}) = \text{limit}(f(x), x, \text{minf});$

(% o63) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} (x^2 + 3x + 2) = \infty$

C 2) On vérifie l'expression de la dérivée, qui est du signe du trinome comme $e^{\hat{-}x} > 0$

(% i64) $fp(x) := \text{diff}(f(x), x);$

(% o64) $fp(x) := \frac{d}{dx} f(x)$

(% i66) $\text{factor}(fp(x));$

(% o66) $-(e^{-x} (x^2 + x - 1))$

(% i71) $\text{trinome2} : \text{coeff}(fp(x), \exp(-x));$

(trinome2) $-x^2 - x + 1$

(% i82) $\text{sol} : \text{solve}(\text{trinome2}=0, x);$

(sol) $\left[x = -\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right), x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right]$

(% i91) $\text{float}(\text{sol});$

(% o91) $[x = -1.618033988749895, x = 0.6180339887498949]$

On définit ces points afin de les positionner sur la courbe

(% i86) $x1 : \text{rhs}(\text{sol}[1]);$

(x1) $-\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$

(% i88) $P1 : [x1, \text{float}(f(x1))];$

(P1) $\left[-\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right), -1.1905299136244283 \right]$

```
(% i95) x2 :rhs(sol[2]);
```

$$(x2) \quad \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

```
(% i97) P2 :[x2,float(f(x2))];
```

$$(P2) \quad \left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 2.2832536985009955 \right]$$

```
(% i74) solve_rat_ineq(trinome2>0);
```

$$(\% \text{ o74}) \quad \left[\left[x > -\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right), x < \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right] \right]$$

```
(% i76) solve_rat_ineq(trinome2<0);
```

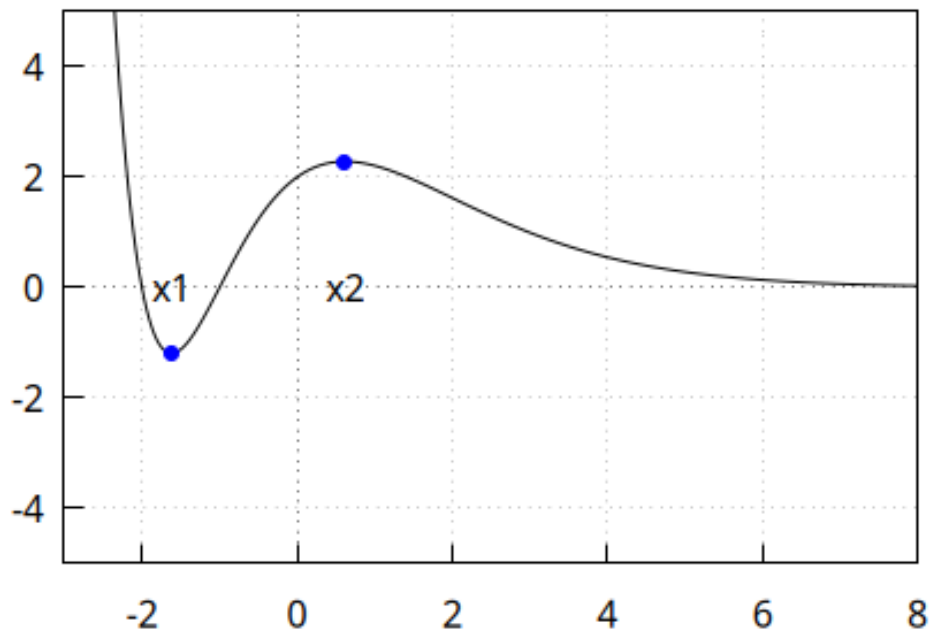
$$(\% \text{ o76}) \quad \left[\left[x < -\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right) \right], \left[x > \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right] \right]$$

f est donc croissante sur $[(-\sqrt{5}-1)/2, (\sqrt{5}-1)/2]$ et décroissante en dehors

```
(% i102) wxdraw2d(  
  title="Graphique de f",  
  grid=true,  
  xaxis=true,  
  yaxis=true,  
  xrange=[-3,8],  
  yrange=[-5,5],  
  color=black,  
  line_width=1,  
  key="",  
  explicit(f(x),x,-3,8),  
  point_size=1,  
  point_type=7,  
  color=blue,  
  points([P1,P2]),  
  color="black",  
  label(["x1",x1,0],["x2",x2,0])  
)  
;
```

```
(% t102)
```

Graphique de f



(% o102)

(% i79) f(0);

(% o79) 2

Sur $[0, x_2]$, f est croissante avec $f(0)=2$ donc f est positive sur cet intervalle. Sur $[2, +\infty[$ f est décroissante avec une limite nulle donc positive.

C 4) La commande integrate permet de trouver une primitive

(% i112) F(x):=integrate(f(x),x);

(% o112) $F(x) := \int f(x) dx$

(% i113) 'F(x)=factor(F(x));

(% o113) $F(x) = -\left(e^{-x}(x^2 + 5x + 7)\right)$

(% i110) F(x);

(% o110) $e^{-x}(-x^2 - 2x - 2) + 3e^{-x}(-x - 1) - 2e^{-x}$

(% i121) expand(subst(a,x,F(x))-subst(0,x,F(x)));

(% o121) $-(e^{-a}a^2) - 5e^{-a}a - 7e^{-a} + 7$

On peut faire un calcul direct

```
(% i120) integrate(f(x),x,0, $\alpha$ );
```

"Is "

α

" positive, negative or zero ?"

positive;

```
(% o120)  $7 - e^{-\alpha} (\alpha^2 + 5\alpha + 7)$ 
```

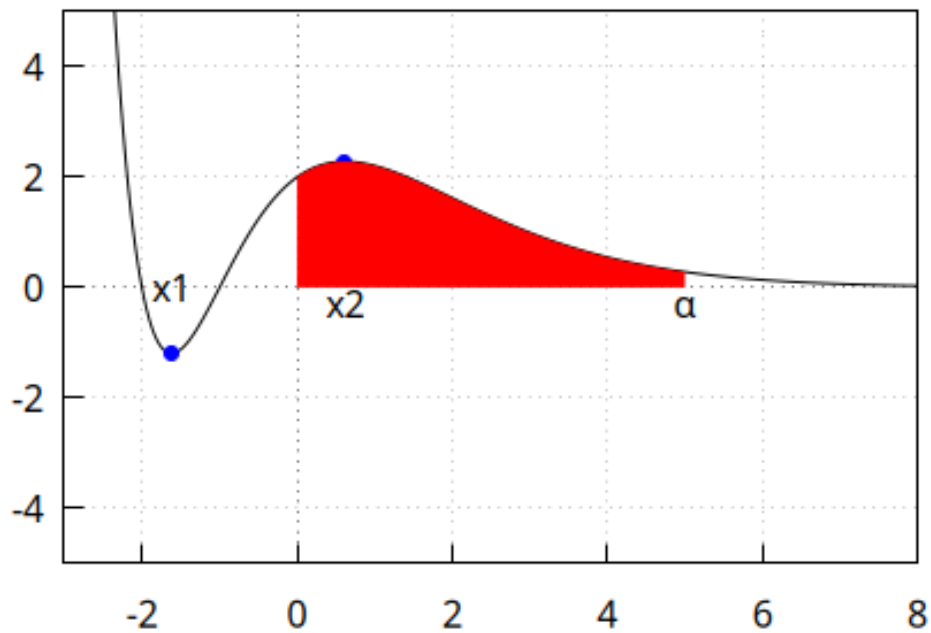
```
(% i122) expand(%);
```

```
(% o122)  $-(e^{-\alpha} \alpha^2) - 5e^{-\alpha} \alpha - 7e^{-\alpha} + 7$ 
```

```
(% i130) wxdraw2d(  
  title="Graphique de f",  
  grid=true,  
  xaxis=true,  
  yaxis=true,  
  xrange=[-3,8],  
  yrange=[-5,5],  
  color=black,  
  line_width=1,  
  key="",  
  explicit(f(x),x,-3,8),  
  point_size=1,  
  point_type=7,  
  color=blue,  
  points([P1,P2]),  
  color="black",  
  label(["x1",x1,0],["x2",x2,-0.3],[" $\alpha$ ",5,-0.3]),  
  filled_func=true,  
  filled_func=f(x),  
  explicit(0,x,0,5)  
);
```

```
(% t130)
```


Graphique de f



(% o130)

Comparaison avec la résolution par une IA

Partie A

Question 1 : Association des courbes

Analyse :

- C_1 passe par $(0; 1)$ et semble avoir une allure exponentielle décroissante.
- C_2 passe par $(0; 2)$ et coupe l'axe des abscisses en $(-2; 0)$ et $(1; 0)$.

Justification :

- C_2 admet deux racines, ce qui suggère qu'elle contient un facteur polynomial de degré 2.
- En observant C_1 , elle est toujours positive et décroissante après un certain point, ce qui est cohérent avec une fonction sans racine.
- La fonction dérivée doit s'annuler aux extremums de la fonction. Sur C_1 , on observe un maximum, donc sa dérivée doit s'annuler.
- C_2 s'annule en deux points distincts, ce qui pourrait correspondre aux extremums d'une fonction.

Conclusion : C_1 représente g et C_2 représente g' .

Question 2 : Équation de la tangente

L'équation de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse $x_0 = 0$ est :

$$y = g'(0)(x - 0) + g(0)$$

D'après les informations :

- $g(0) = 1$ (car C_1 passe par $(0; 1)$)
- $g'(0) = 2$ (car C_2 passe par $(0; 2)$)

Donc : $y = 2x + 1$

Partie B

Question 1 : Vérification de la solution particulière

On doit montrer que $f_0(x) = (x^2 + 3x)e^{-x}$ est solution de $(E) : y + y' = (2x + 3)e^{-x}$.

Calculons $f'_0(x)$:

$$\begin{aligned} f'_0(x) &= (2x + 3)e^{-x} + (x^2 + 3x)(-e^{-x}) \\ &= (2x + 3)e^{-x} - (x^2 + 3x)e^{-x} \\ &= (2x + 3 - x^2 - 3x)e^{-x} \\ &= (-x^2 - x + 3)e^{-x} \end{aligned}$$

Vérifions $f_0 + f'_0$:

$$\begin{aligned} f_0(x) + f'_0(x) &= (x^2 + 3x)e^{-x} + (-x^2 - x + 3)e^{-x} \\ &= (x^2 + 3x - x^2 - x + 3)e^{-x} \\ &= (2x + 3)e^{-x} \end{aligned}$$

Donc f_0 est bien solution de (E) .

Question 2 : Résolution de $(E_0) : y + y' = 0$

L'équation s'écrit : $y' = -y$

C'est une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre.

La solution générale est : $y(x) = Ke^{-x}$ où $K \in \mathbb{R}$.

Question 3 : Solutions de (E)

Les solutions de (E) sont de la forme :

$$y(x) = f_0(x) + y_h(x)$$

où y_h est solution de l'équation homogène (E_0) .

Donc : $y(x) = (x^2 + 3x)e^{-x} + Ke^{-x} = (x^2 + 3x + K)e^{-x}$ où $K \in \mathbb{R}$.

Question 4 : Expression de g

On sait que $g(0) = 1$ (d'après la partie A).

Si $g(x) = (x^2 + 3x + K)e^{-x}$, alors :

$$g(0) = (0 + 0 + K)e^0 = K = 1$$

Donc : $g(x) = (x^2 + 3x + 1)e^{-x}$

Question 5 : Solutions avec deux points d'inflexion

Les points d'inflexion correspondent aux extremums de y' , donc aux zéros de y'' .

Pour $y(x) = (x^2 + 3x + K)e^{-x}$, calculons y' :

$$y'(x) = (2x + 3)e^{-x} - (x^2 + 3x + K)e^{-x} = (-x^2 - x + 3 - K)e^{-x}$$

Calculons y'' :

$$\begin{aligned} y''(x) &= (-2x - 1)e^{-x} - (-x^2 - x + 3 - K)e^{-x} \\ &= (-2x - 1 + x^2 + x - 3 + K)e^{-x} \\ &= (x^2 - x - 4 + K)e^{-x} \end{aligned}$$

Pour avoir deux points d'inflexion, $y''(x) = 0$ doit avoir deux solutions distinctes, donc le discriminant de $x^2 - x - 4 + K$ doit être strictement positif :

$$\Delta = 1 - 4(1)(-4 + K) = 1 + 16 - 4K = 17 - 4K > 0$$

Donc : $K < \frac{17}{4}$

Les solutions sont : $y(x) = (x^2 + 3x + K)e^{-x}$ avec $K < \frac{17}{4}$.

Partie C

Soit $f(x) = (x^2 + 3x + 2)e^{-x}$.

Question 1 : Limite en $+\infty$

La fonction exponentielle l'emporte sur les fonctions polynomiales :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Par croissances comparées :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 3x + 2)e^{-x} = 0$$

Question 2a : Calcul de $f'(x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x + 3)e^{-x} + (x^2 + 3x + 2)(-e^{-x}) \\ &= (2x + 3 - x^2 - 3x - 2)e^{-x} \\ &= (-x^2 - x + 1)e^{-x} \end{aligned}$$

Question 2b : Signe de f' et variations de f

Le signe de $f'(x)$ est celui de $-x^2 - x + 1$ car $e^{-x} > 0$.

Réolvons $-x^2 - x + 1 = 0$:

$$\Delta = 1 + 4 = 5$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{-2} = \frac{-1 \mp \sqrt{5}}{2}$$

Les racines sont : $x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \approx -1,618$ et $x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0,618$.

Le coefficient de x^2 est négatif, donc $-x^2 - x + 1 > 0$ sur $]x_1; x_2[$.

Tableau de variations :

- f décroissante sur $] -\infty; x_1]$ et sur $[x_2; +\infty[$
- f croissante sur $[x_1; x_2]$

Question 3 : Positivité de f sur $[0; +\infty[$

Sur $[0; +\infty[$:

- $e^{-x} > 0$ pour tout x
- $x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$
- Pour $x \geq 0$: $x+1 > 0$ et $x+2 > 0$

Donc $f(x) > 0$ sur $[0; +\infty[$.

Question 4 : Calcul de l'aire

L'aire est donnée par :

$$A(\alpha) = \int_0^\alpha f(x) dx = [F(x)]_0^\alpha = F(\alpha) - F(0)$$

Avec $F(x) = (-x^2 - 5x - 7)e^{-x}$:

$$F(0) = (-0 - 0 - 7)e^0 = -7$$

$$F(\alpha) = (-\alpha^2 - 5\alpha - 7)e^{-\alpha}$$

Donc :

$$A(\alpha) = (-\alpha^2 - 5\alpha - 7)e^{-\alpha} - (-7) = 7 - (\alpha^2 + 5\alpha + 7)e^{-\alpha}$$

ou encore :

$$A(\alpha) = 7[1 - e^{-\alpha}] - (\alpha^2 + 5\alpha)e^{-\alpha}$$

Bilan

Maxima demande de la réflexion et une connaissance assez fine des commandes si l'on veut récupérer des résultats d'une commande pour les réutiliser. La solution proposée par l'IA est propre et bien expliquée.