

EXPLORER LES CHANGEMENT DE VARIABLE DANS LES INTÉGRALES

1 Programme pour changer de variable dans une intégrale indéfinie

Cette commande explicite et effectue un changement de variable dans une intégrale.

Commande 1 : `changevarint(nom de la nouvelle variable, expression du changement de variable,intégrande , variable de l'intégrale)` renvoie les étapes et le changement de variable

Commande 2 : `changevarintb(nom de la nouvelle variable, expression du changement de variable,intégrande , variable de l'intégrale, borne inférieure, borne supérieure)` est identique, mais pour une intégrale définie dont les bornes sont dans l'ordre a et b.

```
(% i1)  changevarint(nomvar, chgt, integrande, x) := block(
[integrande2, temp, temp1, temp2, temp3, sol, temp2bis],
print( Calcul de l'intégrale , 'integrate(integrande, x), avec un changement de variable ),
if nomvar=x then print( Erreur, la nouvelle variable a le même nom que l'ancienne ! )
else (
if freeof(x, chgt) then print( Erreur, le changement de variable n'est pas exprimé
en fonction de la variable qui est dans l'intégrale ! ) else (
print( Le changement de variable est défini par : , nomvar, = , chgt ),
integrande2 : integrande*del(x),
temp : solve(diff(nomvar)=diff(chgt), del(x)),
print( Expression de la différentielle du changement de variable : , temp[1]),
temp1 : subst(rhs(temp[1]), del(x), integrande2),
temp2 : subst(nomvar, chgt, temp1),
temp2bis : coeff(temp2, del(nomvar)),
if not freeof(x, temp2bis) then print( Erreur, le changement de variable n'aboutit pas !
Il n'est pas possible d'exprimer l'intégrande en fonction de la nouvelle variable ! ) else (
print( Calcul de l'intégrale après le changement de variable : , 'integrate(temp2bis, nomvar)),
temp3 : integrate(coeff(temp2, del(nomvar)), nomvar),
print( Résultat de l'intégrale après le changement de variable : , temp3),
sol : subst(chgt, nomvar, temp3),
print( Expression de l'intégrale avec la variable de départ : , sol) )))
)$
```

```
(% i2)  changevarint(u, x^3, x^2*sqrt(1-x^3), x)$
```

Calcul de l'intégrale $\int x^2 \sqrt{1-x^3} dx$ avec un changement de variable

Le changement de variable est défini par : $u = x^3$

Expression de la différentielle du changement de variable : $del(x) = \frac{del(u)}{3x^2}$

Calcul de l'intégrale après le changement de variable : $\int \sqrt{1-u} du$

Résultat de l'intégrale après le changement de variable : $-\left(\frac{2(1-u)^{\frac{3}{2}}}{9}\right)$

Expression de l'intégrale avec la variable de départ : $-\left(\frac{2(1-x^3)^{\frac{3}{2}}}{9}\right)$

2 La commande native dans Maxima

Il existe aussi une commande native dans Maxima :

- 1) on définit l'intégrale sous forme inerte
- 2) on définit le changement de variable sous la forme $f(x, u) = u - x^2$ (pour $u = x^2$)
- 3) on évalue le résultat

```
(% i5)  expr : 'integrate(x * exp(x^2), x);
        res : changevar(expr, u - x^2, u, x);
        ev(res, integrate);
```

(expr) $\int x e^{x^2} dx$

(res) $\frac{\int e^u du}{2}$

(%o5) $\frac{e^u}{2}$

3 Programme pour changer de variable dans une intégrale définie

```
(% i6)  changevarintb(nomvar, chgt, integrande, x, a, b) := block(
[integrande2, temp, temp1, temp2, temp3, sol, temp2bis, a1, b1, valeur],
print( Calcul de l'intégrale, 'integrate(integrande, x, a, b), _, avec un changement de variable ),
if nomvar=x then print( Erreur, la nouvelle variable a le même nom que l'ancienne! )
else (
if freeof(x, chgt) then print( Erreur, le changement de variable n'est pas exprimé
en fonction de la variable qui est dans l'intégrale! ) else (
print( Le changement de variable est défini par : ,nomvar, = ,chgt ),
integrande2 : integrande*del(x),
temp : solve(diff(nomvar)=diff(chgt), del(x)),
print( Expression de la différentielle du changement de variable : ,temp[1]),
temp1 : subst(rhs(temp[1]), del(x), integrande2),
temp2 : subst(nomvar, chgt, temp1),
temp2bis : coeff(temp2, del(nomvar)),
if not freeof(x, temp2bis) then print( Erreur, le changement de variable n'aboutit pas !
Il n'est pas possible d'exprimer l'intégrande en fonction de la nouvelle variable! ) else (
a1 : subst(a, x, chgt), b1 : subst(b, x, chgt),
print( Calcul de l'intégrale après le changement de variable : , 'integrate(temp2bis, nomvar, a1, b1)),
temp3 : integrate(coeff(temp2, del(nomvar)), nomvar),
print( Résultat de l'intégrale après le changement de variable : [ ,temp3, ]_, a1, ^, b1),
sol : subst(chgt, nomvar, temp3),
print( Expression de la primitive avec la variable de départ : ,sol) )),
valeur : integrate(temp2bis, nomvar, a1, b1),
print( Valeur de l'intégrale : ,valeur, en valeur approchée : ,float(valeur) )
)$
```

```
(% i7)  changevarintb(u, x^3, x^2*sqrt(1-x^3), x, 0, 1/2)$
```

Calcul de l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{2}} x^2 \sqrt{1-x^3} dx$ _ avec un changement de variable

Le changement de variable est défini par : $u = x^3$

Expression de la différentielle du changement de variable : $del(x) = \frac{del(u)}{3x^2}$

Calcul de l'intégrale après le changement de variable : $\int_0^{\frac{1}{8}} \sqrt{1-u} du$

Résultat de l'intégrale après le changement de variable : $\left[-\frac{2(1-u)^{\frac{3}{2}}}{9} \right]_0^{\frac{1}{8}}$

Expression de la primitive avec la variable de départ : $-\frac{2(1-x^3)^{\frac{3}{2}}}{9}$

Valeur de l'intégrale : $\frac{\frac{2}{3} - \frac{7^{\frac{3}{2}}}{32^{\frac{7}{2}}}}{3}$ en valeur approchée : 0.04033609925404458

4 Autres exemples

(% i9) changevarint(u,x^2+5,x*sin(x^2+5),x)\$

Calcul de l'intégrale $\int x \sin(x^2 + 5) dx$ avec un changement de variable

Le changement de variable est défini par : $u = x^2 + 5$

Expression de la différentielle du changement de variable : $del(x) = \frac{del(u)}{2x}$

Calcul de l'intégrale après le changement de variable : $\int \sin(u) du$

Résultat de l'intégrale après le changement de variable : $-\left(\frac{\cos(u)}{2}\right)$

Expression de l'intégrale avec la variable de départ : $-\left(\frac{\cos(x^2 + 5)}{2}\right)$

(% i11) changevarint(u,log(x),cos(log(x))/x,x)\$

Calcul de l'intégrale $\int \frac{\cos(\log(x))}{x} dx$ avec un changement de variable

Le changement de variable est défini par : $u = \log(x)$

Expression de la différentielle du changement de variable : $del(x) = x del(u)$

Calcul de l'intégrale après le changement de variable : $\int \cos(u) du$

Résultat de l'intégrale après le changement de variable : $\sin(u)$

Expression de l'intégrale avec la variable de départ : $\sin(\log(x))$

(% i12) changevarint(u,sin(x),sin(x)*cos(x),x)\$

Calcul de l'intégrale $\int \cos(x) \sin(x) dx$ avec un changement de variable

Le changement de variable est défini par : $u = \sin(x)$

Expression de la différentielle du changement de variable : $del(x) = \frac{del(u)}{\cos(x)}$

Calcul de l'intégrale après le changement de variable : $\int u du$

Résultat de l'intégrale après le changement de variable : $\frac{u^2}{2}$

Expression de l'intégrale avec la variable de départ : $\frac{\sin(x)^2}{2}$

(% i18) changevarint(u,sin(x),1/sqrt(1-x^2),x);

Calcul de l'intégrale $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ avec un changement de variable

Le changement de variable est défini par : $u = \sin(x)$

Expression de la différentielle du changement de variable : $del(x) = \frac{del(u)}{\cos(x)}$

Erreur, le changement de variable n'aboutit pas !

Il n'est pas possible d'exprimer l'intégrande en fonction de la nouvelle variable !

(%o18) Erreur, le changement de variable n'aboutit pas !

Il n'est pas possible d'exprimer l'intégrande en fonction de la nouvelle variable !

Le changement de variable est correct mais la procédure échoue car Maxima ne simplifie pas $1 - \sin(x)^2$ en $\cos(x)^2$. Maxima sait cependant calculer directement cette intégrale.

(% i21) 'integrate(1/sqrt(1-x^2),x)=integrate(1/sqrt(1-x^2),x);

(%o21) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x)$

(% i27) changevarintb(u,log(x),1/(x*(1+log(x))),x,1,%e)\$

Calcul de l'intégrale $\int_1^e \frac{1}{x (\log(x) + 1)} dx$ – avec un changement de variable

Le changement de variable est défini par : $u = \log(x)$

Expression de la différentielle du changement de variable : $del(x) = x del(u)$

Calcul de l'intégrale après le changement de variable : $\int_0^1 \frac{1}{u+1} du$

Résultat de l'intégrale après le changement de variable : $[\log(u+1)]_0^1$

Expression de la primitive avec la variable de départ : $\log(\log(x) + 1)$

Valeur de l'intégrale : $\log(2)$ en valeur approchée : 0.6931471805599453