Une recherche de problème ouvert avec Maxima

Présentation

Cet exemple se propose de mettre en valeur l'apport du logiciel de calcul formel Maxima dans la recherche puis la résolution d'un problème ouvert. Nous mettrons en évidence l'intérêt de cet outil qui permet d'investiguer et d'expérimenter sur un problème complexe.

Enoncé du problème

Trouver une valeur approchée de l'aire comprise entre les deux courbes définies par les fonctions suivantes :

$$f(x) = (x-3)(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)(x+3) \text{ et } g(x) = \exp(x)$$

Connaissances requises

Ce exercice s'adresse à un public de terminale option spécialité mathématiques ou à des étudiants de première année de licence scientifique. Les connaissances attendues :

- fonction exponentielle, polynômes
- dérivation, tableaux de variations, sens de variation
- intégration et calculs d'aires
- résolution numérique d'équations

Intérêts pédagogiques

Le grand intérêt de ce problème ouvert est de montrer qu'une recherche graphique ne suffit pas pour résoudre un problème mathématique, et qu'il faut recourir à la théorie pour obtenir la solution à ce problème.

Mettre en évidence l'insuffisance de la recherche graphique

L'approche graphique permet dans un premier temps de visualiser l'aire cherchée en ajustant les échelles sur les axes et d'élaborer une approche expérimentale. Cependant, la mise en forme mathématique va montrer que ce que l'on voit ne correspond pas totalement au problème, et qu'une solution se cache hors des limites du graphique (et qu'il est impossible de représenter car l'échelle est trop grande).

Utiliser les dérivées successives d'une focntion

Les points d'intersection des deux courbes se calculent avec l'étude de la fonction différence, dont il faut étudier les dérivées successives de nombreuses fois avant de pouvoir conclure. L'élève doit donc élaborer une théorie permettant d'aboutir au résulat, puis doit la mettre en oeuvre.

Intérêt de l'utilisation du logiciel Maxima

Le calcul des dérivées successives, la recherche des valeurs approchées des points d'intersection des deux courbes ne sont pas réalisables "à la main". Le recours à un logiciel de calcul formel se révèle indispensable et prend tout son sens sur cet exercice.

Le logiciel Maxima

On peut soit télécharger le logiciel Maxima et accéder à la documentation sur le site https://maxima-french-doc.fr/, soit travailler directement en ligne à l'adresse https://net124.reltub.ca/yamwi/

Fiche professeur

La recherche de ce problème ouvert est intéressante à être effectuée par groupes. Le professeur donne l'énoncé et l'accès à l'outil logiciel. Il peut être formateur et enrichissant de faire des points d'étapes sur les premières recherches et expérimentations.

Le déroulement de la séance

1. Distribution du texte du problème ouvert
2. Premier temps de recherche
3. Mise en commun des idées
4. Première étape d'investigation par un graphique (il est possible d'utiliser un autre outil logiciel pour le tracé des courbes que Maxima si les élèves ont l'habitude).
5. Premières déductions et mise en oeuvre d'une stratégie. On peut obtenir des réponses au calcul d'aire en ne considérant que les 7 points d'intersection et en calculant leurs valeurs approchées sans démontrer leur existence formelle. Le rôle de l'enseignant va consister à susciter le doute en demandant de démontrer l'existence de ces points.
6. Le recours à Maxima est alors indispensable pour calculer les dérivées successives de la fonction différence. Un petit digest des commandes Maxima peut être fourni, plutôt que la documentation complète de Maxima.
7. Les calculs des valeurs approchées sont ensuite réalisés sur chaque intervalle dans lequel la connaissance des positions respectives des courbes est connue.
8. Mise en commun des résultats et conclusion

Résolution complète du problème avec Maxima

Le fichier wxMaxima est téléchargeable (sous forme d'un fichier comprimé au format zip à décompresser) à l'adresse :

Fichier solution du problème ouvert avec wxMaxima

Fiche élève

Enoncé du problème

Trouver une valeur approchée de l'aire comprise entre les deux courbes définies par les fonctions suivantes :

$$f(x) = (x-3)(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)(x+3) \text{ et } g(x) = \exp(x)$$

Le logiciel de calcul formel Maxima est mis à disposition dans le cadre de la recherche pour la résolution de ce problème.
Consignes : Il s'agit d'un problème de recherche, pour lequel toute idée, toute expérimentation est valorisée. Des points réguliers seront faits avec l'enseignant sur les pistes, les idées et l'avancée de la recherche.

Quelques commandes Maxima

Ce petit récapitulatif est issu du document intitulé Aide Mémoire Maxima réalisé par le lycée Stendhal de Grenoble.

1 Quelques fonctions de base

- `abs(x)` : Valeur absolue de x.
- `X:a` : Donne à `X` la valeur a.
- `kill(X)` : Efface la valeur de la variable x.
- `factor(a)` : Décompose l'entier a en produit de facteurs premiers.
- Les opérations : `+`, `−`, `*`, `/`
- `sqrt(x)` : Racine carrée de x.
- `cos(x)` : Cosinus de l'angle x en radians.
- `sin(x)` : Sinus de l'angle x en radians.
- `tan(x)` : Tangente de l'angle x en radians.
- `exp(x)` : Exponentielle de x.
- `log(x)` : Logarithme népérien de x.
- `log10(x)` : Logarithme décimal de x.
- `entier(x)` : Partie entière de x.
- `assume(x>a)` : Donne une condition à x avant de faire un calcul.
- `declare(n,integer)` : Déclare une variable comme un entier.

2 Polynômes

- `expand(P)` : Développe le polynôme P.
- `factor(P)` : Factorise le polynôme P.
- `rat(P,X)` : Ordonne suivant les puissances décroissantes de X.
- `divide(Q,P)` : Division euclidienne de Q par P.
- `ratcoeff(P,X^n)` : Coefficient du terme en X^n.
- `subst(a,X,P)` : Calcule P pour $X = a$.
- `ratsubst(Y,E(X),P)` : Remplace $E(x)$ par Y dans P.
- `gcd(P,Q)` : PGCD de P et Q.
- `lcm(P,Q)` : PPCM de P et Q.
- `solve(P,X)` : Racines de P.

3 Expressions littérales

- `subst(a,X,E(X))` : Calcule $E(X)$ pour $X = a$.
- `ratsubst(Y,F(X),E(X))` : Remplace $F(x)$ par Y dans $E(X)$.
- `is(equal(E(X),F(X)))` : `true` si égalité pour tout x.
- `rpartfrac(R(X),X)` : Décomposition en éléments simples.
- `factor(E(x))` : Factorise l'expression.
- `expand(E(x))` : Développe l'expression.
- `display(E(x))` : Simplifie l'expression.

4 Équations et systèmes

Exemple : `Eq:X^2+3*X+2=2*X+1`

- `Eq+5` : Ajoute 5 dans chacun des membres.
- `Eq-3*X` : Enlève $3x$ dans chacun des membres.
- `solve(Eq,X)` : Résout l'équation suivant X.
- `linsolve([E1,E2,E3],[x,y,z])` : Solutions d'un système.

5 Fonctions, dérivées et primitives

- `define(f(x),expression)` : Définit $f(x)$.
- `diff(f(X),X)` : Dérivée de f.
- `diff(f(X),X,n)` : Dérivée n-ième de f.
- `integrate(f(X),X)` : Primitive de $f(X)$.
- `load(bypart)` puis `byparts(intégrande,variable,u,dv)` : Intégration par parties.

6 Intégrales

- `integrate(f(X),X,a,b)` : Valeur exacte de $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.
- `intpart(f(x),g(x),a,b)` : Intégration par parties de $f(x)g(x)$.
- `'integrate(f(x),x,0,1)=integrate(f(x),x,0,1)` : Écriture + résultat.

7 Limites

- `limit(f(x),x,a)` : Limite de $f(x)$ quand $x \to a$.
- `limit(f(x),x,minf)` : Limite quand $x \to -\infty$.
- `limit(f(x),x,inf)` : Limite quand $x \to +\infty$.

8 Résolution numérique : $f(x) = c$ sur $[a, b]$

- `find_root(f(x)=c,x,a,b)` : Valeur approchée des solutions.

9 Valeurs approchées à n chiffres

- `fpprec:n;` puis `bfloat(expression)`
- Ex : `bfloat(%pi)` $\to$ `3.14159265358979`
- Ex : `bfloat(%phi)` $\to$ `1.618033998749895`

Un exemple pour tracer une courbe avec wxMaxima

Le code wxMaxima suivant :

```
wxdraw2d(
 title="Courbe des fonctions f et g ",
   grid=true,
xaxis=true,
yaxis=true,
 xrange=[-10,10],
 yrange=[-2,2],
  color=black,
line_width=1,
key="f(x)",
explicit(sin(x),x,-10,10),
    color=blue,
    key="g(x)",
    explicit(x+1,x,-10,10)
)$
```

génère le graphique :