

# BACCALAURÉAT 2026 AMÉRIQUE DU NORD S SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES – CORRIGÉ DU SUJET 1 AVEC MAXIMA

Ce document permet de montrer l'utilisation du logiciel de calcul formel Maxima (et de son interface graphique wxMaxima) dans le cadre de la résolution de ce sujet de baccalauréat. Maxima est une aide précieuse pour cette résolution, mais il ne peut évidemment pas résoudre l'intégralité des questions. On mettra donc en évidence les points forts du logiciel dans ce cadre.

Ce corrigé a été produit directement avec wxMaxima qui est utilisé pour la réalisation des calculs. Le corrigé ne se veut pas complet, mais a pour ambition de montrer les possibilités de Maxima dans le cadre de la résolution d'un sujet de baccalauréat. Les raisonnements ne sont donc pas forcément complets.

Le fichier source wxMaxima est à télécharger (par exemple pour reproduire les calculs ou adapter les commandes utilisées) sur le site <https://maxima-french-doc.fr/> à la rubrique **Exemples**.

## Exercice 1 : Énoncé

Une plateforme de diffusion musicale propose trois types d'abonnements : « Étudiant », « Classique » et « Famille ». Elle propose également une option « Écoute hors-ligne » qu'on peut activer pour chaque type d'abonnement et qui permet de télécharger de la musique.

Une étude statistique menée sur les abonnés a permis d'établir que :

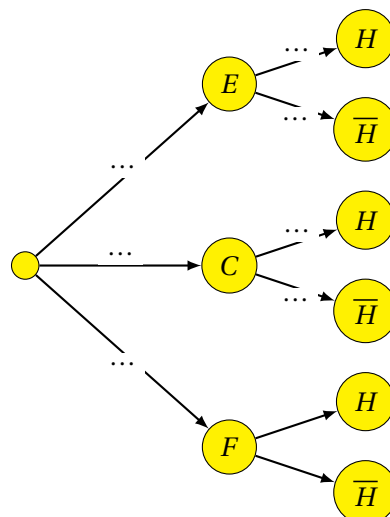
- 25 % des abonnés ont choisi l'abonnement « Étudiant » et 15 % ont choisi l'abonnement « Famille » ;
- 45 % des abonnés « Étudiant » ont activé l'option « Écoute hors-ligne » ;
- 30 % des abonnés « Classique » ont activé l'option « Écoute hors-ligne » ;
- 12 % des abonnés ont choisi l'abonnement « Famille » et ont activé l'option « Écoute hors-ligne ».

On prélève au hasard le profil d'un abonné et on considère les événements suivants :

- $E$  : l'abonné a choisi l'abonnement « Étudiant » ;
- $C$  : l'abonné a choisi l'abonnement « Classique » ;
- $F$  : l'abonné a choisi l'abonnement « Famille » ;
- $H$  : l'abonné a activé l'option « Écoute hors-ligne ».

### Partie A

1. Recopier l'arbre de probabilités suivant, en complétant les pointillés.



2. Calculer la valeur exacte de  $P(E \cap H)$ .
3. Démontrer que la probabilité qu'un abonné ait activé l'option « Écoute hors-ligne » est de 0,4125.
4. Un abonné a activé l'option « Écoute hors-ligne ». Déterminer la probabilité qu'il ait choisi l'abonnement « Étudiant ». *On arrondira le résultat au millième.*

## Partie B

On choisit huit abonnés de cette plateforme, au hasard et de manière indépendante. On considère qu'il y a suffisamment d'abonnés pour que ce choix soit assimilé à un tirage avec remise. On rappelle que la probabilité qu'un abonné ait activé l'option « Écoute hors-ligne » est de 0,4125.

On note  $X$  la variable aléatoire donnant le nombre d'abonnés ayant activé l'option « Écoute hors-ligne ».

1. On admet que la variable aléatoire  $X$  suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.
2. Calculer la probabilité qu'aucun de ces huit abonnés n'ait activé l'option « Écoute hors-ligne ». *On arrondira le résultat au millième.*
3. Dans cette question,  $n$  est un entier naturel non nul. On s'intéresse à un échantillon de  $n$  abonnés, qu'on assimile à un tirage avec remise. On note  $q_n$  la probabilité qu'au moins un abonné de cet échantillon ait activé l'option « Écoute hors-ligne ».
  - a. Démontrer que, pour tout  $n$  entier naturel non nul,  $q_n = 1 - 0,5875^n$ .
  - b. Déterminer la plus petite valeur de  $n$  telle que la probabilité qu'au moins un abonné de l'échantillon ait activé l'option « Écoute hors-ligne » soit supérieure ou égale à 99,9%.

## Partie C

La plateforme propose les tarifs mensuels suivants :

- Abonnement « Étudiant » : 5 € par mois ;
- Abonnement « Classique » : 10 € par mois ;
- Abonnement « Famille » : 16 € par mois ;
- Option « Écoute hors-ligne » : 2 euros de plus par mois quel que soit l'abonnement choisi.

On note  $Y$  la variable aléatoire égale au montant payé mensuellement par un abonné.

1. Donner les six valeurs possibles prises par la variable aléatoire  $Y$ .
2. Dresser le tableau décrivant la loi de probabilité de la variable aléatoire  $Y$ .
3. Démontrer que l'espérance mathématique de la variable aléatoire  $Y$  vaut 10,475 et interpréter ce résultat dans le contexte.
4. À l'aide de la calculatrice, donner la variance de la variable aléatoire  $Y$ , arrondie au centième.
5. Une plateforme vidéo propose les mêmes types d'abonnements. On note  $Z$  la variable aléatoire égale au montant payé mensuellement par un abonné à cette plateforme vidéo. On admet que l'espérance de la variable aléatoire  $Z$  vaut 9 et son écart-type 2.
  - a. Calculer la variance de la variable aléatoire  $Z$ .
  - b. Un responsable affirme que si on interroge un abonné de cette plateforme vidéo au hasard, il y a au moins 50% de chances pour que le prix de son abonnement soit strictement compris entre 6 et 12 euros. Justifier cette affirmation.

## Exercice 2 : Énoncé

La perche-soleil est une espèce de poisson envahissante. Un plan de lutte contre la prolifération de cette espèce est mis en place et on étudie dans cet exercice deux modèles d'évolution de la population de perches-soleil dans un étang naturel. On estime que, dans cet étang, le nombre de perches-soleil s'élève à 4 000 individus au 1<sup>er</sup> janvier 2025.

### Partie A : étude d'un modèle discret

Dans cette partie, on modélise le nombre de perches-soleil dans l'étang par une suite  $(u_n)$ . Pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n$  désigne le nombre de perches-soleil, exprimé en millier, dans l'étang au 1<sup>er</sup> janvier de l'année 2025 +  $n$ .

La suite  $(u_n)$  est définie par :

- $u_0 = 4$ ;
- pour tout entier naturel  $n$  :  $u_{n+1} = 4 - \frac{4}{u_n}$ .

On admet que cette suite est bien définie et qu'en particulier pour tout entier  $n$ ,  $u_n > 0$ .

1. Calculer le nombre de perches-soleil au 1<sup>er</sup> janvier 2026 donnée par ce modèle.

2. On note  $h$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par  $h(x) = 4 - \frac{4}{x}$ .

a. Justifier que la fonction  $h$  est croissante sur  $]0; +\infty[$ .

b. Démontrer que pour tout entier naturel  $n$  :

$$2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4.$$

c. En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente. On note  $\ell$  sa limite.

d. Justifier que  $\ell = 2$ .

e. Ce modèle prévoit-il une élimination à long terme de l'espèce envahissante ?

3. On considère le script Python ci-dessous.

a. Soit  $s$  un réel appartenant à l'intervalle  $]2; 4[$ . Recopier et compléter ce script de sorte qu'il renvoie, après exécution, le plus petit entier  $n$  tel que  $u_n < s$ .

```
def population(s) :  
    u = 4  
    n = 0  
    while ... :  
        u = ...  
        n = ...  
    return n
```

b. Quelle valeur renvoie la commande `population(2.2)` ? Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

### Partie B : étude d'un modèle continu

On note  $t$  le temps écoulé, exprimé en année, à partir du 1<sup>er</sup> janvier 2025. L'évolution du nombre de perches-soleil, exprimé en millier, est modélisée par la fonction  $p$  telle que :

- la fonction  $p$  est définie et dérivable sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ ;
- $p(0) = 4$ ;

- la fonction  $p$  est solution de l'équation différentielle (E) :  $y' + y = 2$ , où  $y$  est une fonction de la variable réelle  $t$ .

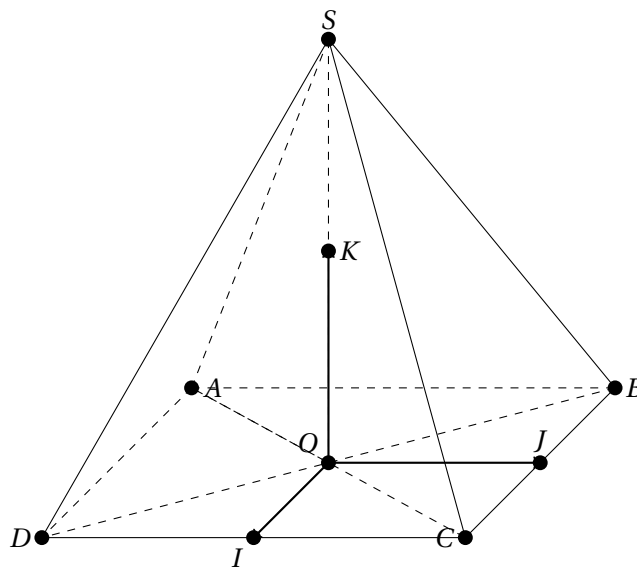
1. Donner l'ensemble des solutions de l'équation (E).
2. En déduire que l'expression de la fonction  $p$  sur  $[0; +\infty[$  est

$$p(t) = 2e^{-t} + 2.$$

3. Ce modèle prévoit-il une élimination à long terme de l'espèce envahissante ?

### Exercice 3 : Énoncé

Dans cet exercice l'unité est le cm. On considère une pyramide à base carrée  $SABCD$  comme dans la figure ci-dessous.



Dans cette figure :

- $AB = BC = CD = DA = OS = 2$  cm ;
- $I$  est le milieu de  $[CD]$ ,  $J$  le milieu de  $[BC]$  et  $K$  le milieu de  $[OS]$ .

L'espace est muni du repère orthonormé  $(O; \vec{OI}, \vec{OJ}, \vec{OK})$ . On admet que  $B(-1; 1; 0)$ ,  $C(1; 1; 0)$  et  $S(0; 0; 2)$ .

Les parties A et B sont indépendantes.

#### Partie A

1. Donner les coordonnées des points  $A$  et  $D$ .
2. Calculer le produit scalaire  $\vec{SC} \cdot \vec{SB}$ .
3. En déduire la mesure de l'angle  $\widehat{BSC}$  arrondie au dixième de degré près.

## Partie B

On se propose dans cette partie de déterminer la distance du point  $O$  au plan  $(SBC)$ .

1. Soit  $\vec{n}$  le vecteur de coordonnées  $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
  - a. Justifier que le vecteur  $\vec{n}$  est normal au plan  $(SBC)$ .
  - b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan  $(SBC)$  est  $2y + z - 2 = 0$ .
2. On note  $H$  le projeté orthogonal du point  $O$  sur le plan  $(SBC)$ .
  - a. Justifier qu'une représentation paramétrique de la droite  $(OH)$  est

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

- b. Calculer les coordonnées du point  $H$ .
- c. En déduire que la distance du point  $O$  au plan  $(SBC)$  est égale à  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$  cm.

## Partie C

On se propose ici de retrouver le résultat de la **partie B** par une autre méthode.

1. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par :

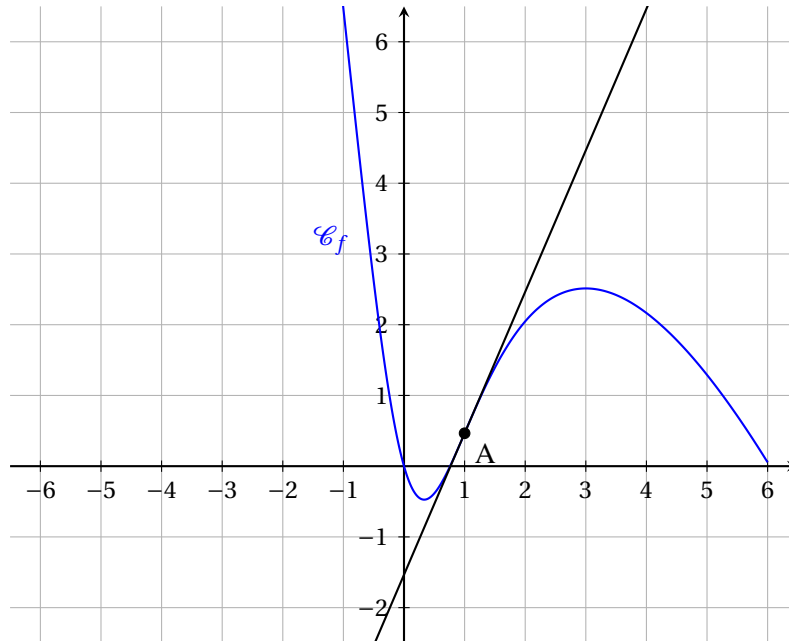
$$V = \frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur}.$$

- a. Calculer le volume de la pyramide  $SABCD$ .
  - b. En déduire que le volume de la pyramide  $OCBS$  est égal à  $\frac{2}{3}$  cm<sup>3</sup>.
2. Déterminer l'aire du triangle  $SBC$ .
  3. Déduire des questions précédentes que la distance du point  $O$  au plan  $(SBC)$  est égale à  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$  cm.

## Exercice 4 : Énoncé

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 5 \ln(x^2 + 1) - 3x$  et on admet que la fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

On note  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan. On a tracé ci-dessous la courbe  $\mathcal{C}_f$  et la tangente à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point  $A$  d'abscisse 1.



1. Conjecturer, à l'aide de la représentation graphique de la fonction  $f$ , les intervalles de  $\mathbb{R}$  sur lesquels la fonction  $f$  semble convexe ou concave.
2. Déterminer, en justifiant, la limite de la fonction  $f$  en  $-\infty$ .
3. a. Démontrer que, pour tout  $x$  réel strictement positif,

$$f(x) = x \left( 10 \frac{\ln x}{x} - 3 \right) + 5 \ln \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right).$$

- b. Déterminer, en justifiant, la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ .

4. a. Démontrer que pour tout  $x$  réel,

$$f'(x) = \frac{-3x^2 + 10x - 3}{x^2 + 1}.$$

- b. Étudier les variations de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

5. On admet que la fonction  $f$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que pour tout réel  $x$ ,

$$f''(x) = \frac{-10x^2 + 10}{(x^2 + 1)^2}.$$

- a. Valider ou rejeter la conjecture faite à la question 1.
- b. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point  $A$  d'abscisse 1.
- c. En déduire que pour tout  $x \geq 1$ ,

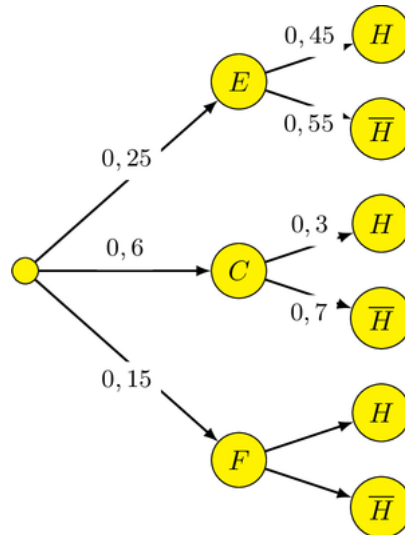
$$\ln(x^2 + 1) \leq x + \ln(2) - 1.$$

# Correction avec Maxima

## 1 Exercice 1

### 1.1 Partie A

1) On utilise les données du texte pour compléter l'arbre



2) formule classique des probabilités conditionnelles

```
(% i1) p1 :0.25*0.45;  
(p1) 0.1125
```

```
(% i2) print( p(E inter H)= ,p1)$
```

p(E inter H)= 0.1125

3) Formule des probabilités totales

```
(% i3) p2 :p1+0.6*0.3+0.12;  
(p2) 0.4125
```

4) On cherche p(E) sachant H, qui vaut p(E inter H)/p(H) et on arrondit au millième :

```
(% i4) p3 :p1/p2;  
(p3) 0.27272727272727276
```

```
(% i5) float(round(1000*p3)/1000);  
(%o5) 0.273
```

### 1.2 Partie B

1) Loi binomiale de paramètre n=8 et p=p2, définie par

```
(% i6) X(k) :=binomial(8,k)*p2^k*(1-p2)^(8-k);
```

```
(%o6) X(k) :=  $\binom{8}{k} p2^k (1-p2)^{8-k}$ 
```

2) On calcule p(X=0) et on arrondit

```
(% i7) X(0);
(% o7) 0.014192632831192617
```

```
(% i8) float(round(1000*X(0))/1000);
(% o8) 0.014
```

3) Il s'agit d'une loi binomiale de paramètre n et p=2, définie par

```
(% i9) Y(n,k) :=binomial(n,k)*p2^ k*(1-p2)^( n-k);
```

```
(% o9) Y(n,k) :=  $\binom{n}{k} p2^k (1-p2)^{n-k}$ 
```

3) a)  $q_n = 1 - Y(n,0)$  en utilisant l'événement contraire :

```
(% i10) q(n) :=1-Y(n,0);
(% o10) q(n) := 1 - Y(n,0)
```

```
(% i11) q(n);
(% o11) 1 - 1.00.5875^n
```

```
(% i12) subst(1, 1.0, q(n));
(% o12) 1 - 0.5875^n
```

```
(% i13) solve(q(n)=0.999,n);
```

```
rat:replaced0.0010000000000000009by1/1000 = 0.001rat:replaced-1.0by-1/1 = -1.0rat:replaced0.5875by47/80 = 0.5875
```

```
(% o13) [80^n = 100047^n]
```

```
(% i14) find_root(q(n)=0.999,n,1,20);
```

```
(% o14) 12.987455513126013
```

La plus petite valeur de n est donc égale à 13. Vérification :

```
(% i15) makelist(print( n= ,k, qn= ,q(k)),k,5,15)$
```

```
n= 5 qn= 0.9300094583129883
```

```
n= 6 qn= 0.9588805567588806
```

```
n= 7 qn= 0.9758423270958424
```

```
n= 8 qn= 0.9858073671688073
```

```
n= 9 qn= 0.9916618282116744
```

```
n= 10 qn= 0.9951013240743587
```

```
n= 11 qn= 0.9971220278936858
```

```
n= 12 qn= 0.9983091913875404
```

```
n= 13 qn= 0.99900664994018
```

```
n= 14 qn= 0.9994164068398558
```

```
n= 15 qn= 0.9996571390184152
```

### 1.3 Partie C

1) Valeurs de la variable aléatoire Y : 5, 7, 10, 12, 16, 18

```
(% i21) y[1] :5$y[2] :7$y[3] :10$y[4] :12$y[5] :16$y[6] :18$
```

5	7	10	12	16	18
$E \cap \bar{H}$	$E \cap H$	$C \cap \bar{H}$	$C \cap H$	$F \cap \bar{H}$	$F \cap H$

FIGURE 1 – evenement.png

2) Les probabilités des événements associés se trouvent avec l'arbre.

Il reste à calculer la probabilité de F inter H barre.  $p(F \cap \bar{H}) = p(F) - p(F \cap H)$

```
(% i27) z[1] :0.25*0.55 ;z[2] :0.25*0.45 ;z[3] :0.6*0.7 ;z[4] :0.6*0.3 ;z[5] :0.15-0.12 ;z[6] :0.12 ;
(z[1]) 0.1375
```

```
(z[2]) 0.1125
```

```
(z[3]) 0.42
```

```
(z[4]) 0.18
```

```
(z[5]) 0.03
```

```
(z[6]) 0.12
```

```
(% i28) M : matrix(
append([ Valeurs de Y ], makelist(y[i], i, 1, 6)),
append([ P(Y=yi) ], makelist(z[i], i, 1, 6))
);
```

```
(M) [ Valeurs de Y      5      7      10     12     16     18 ]
      [ P(Y = yi)    0.1375  0.1125  0.42   0.18   0.03   0.12 ]
```

```
(% i29) EY : float(sum(rationalize(y[i]) * rationalize(z[i]), i, 1, 6));
(EY) 10.475
```

3) Tarif mensuel moyen de 10,475 euros sur un grand nombre d'abonnés

```
(% i31) EY2 : float(sum(rationalize(y[i]^2) * rationalize(z[i]), i, 1, 6));
/* Variance */
```

```
VY : EY2 - EY^2 ;
(EY2) 123.42999999999999
```

```
(VY) 13.704374999999999
```

```
(% i32) float(round(VY*100)/100);
(%o32) 13.7
```

5) a) La variance est le carré de l'écart-type

```
(% i33) VZ :2^2 ;
(VZ) 4
```

5) b)  $6 \leq Z \leq 12$  donne  $Z-9$  dans l'intervalle  $[-3; 3]$ . On applique le cours et l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :  $P(6 \leq Z \leq 12) = 1 - P(|Z - 9| \geq 3) \leq 4/3^2$ .

```
(% i34) 1-4/3^2 ;
(%o34) 5/9
```

```
(% i35) float(%);
(%o35) 0.5555555555555556
```

La probabilité est supérieure à 0,5 donc le responsable a raison.

## 2 Exercice 2

```
(% i36) kill(all)$
```

A) 1) On définit la suite et on calcule  $u[1]$  qui permet de trouver 3000 perches

```
(% i2) u[0] : 4;  
      u[n] := 4 - 4/u[n-1];  
(u[0]) 4
```

```
(u[n])  $u_n := 4 - \frac{4}{u_{n-1}}$ 
```

```
(% i3) u[1];  
(%o3) 3
```

```
(% i4) h(x) := 4 - 4/x;  
(%o4)  $h(x) := 4 - \frac{4}{x}$ 
```

```
(% i5) diff(h(x),x);  
(%o5)  $\frac{4}{x^2}$ 
```

2) La dérivée de  $h$  est strictement positive, donc  $h$  est croissante. On démontre l'inégalité par une récurrence classique, sachant que

```
(% i6) print( h(2)= ,h(2), , h(u[n+1])=u[n+2] , , h(u[n])=u[n+1] et h(4)= ,h(4), <4 )$
```

$h(2) = 2$ ,  $h(u[n+1]) = u[n+2]$ ,  $h(u[n]) = u[n+1]$  et  $h(4) = 3 < 4$

La suite est décroissante et minorée, donc elle converge vers  $l \geq 2$ . l solution de  $l = h(l)$  :

```
(% i7) solve(h(l)=l,l);  
(%o7) [l=2]
```

Il y a donc stabilisation à 2000 perches. On écrit le script en programme maxima :

```
(% i8) population(s) :=block(  
      [k],  
      k:1,  
      while u[k]>=s do k:k+1,  
      print(k)  
      );  
(%o8) population(s) := block([k], k:1, while uk >= s do k:k+1, print(k))
```

```
(% i9) population(2.2)$  
10
```

La population sera inférieure à 2 200 perches à partir de 2035.

```
(% i10) makelist(print( Pour n= ,i, population = ,1000*float(u[i]), pour l'année ,2025+i),i,1,15)$
```

Pour n= 1 population = 3000.0 pour l'année 2026  
Pour n= 2 population = 2666.6666666666665 pour l'année 2027  
Pour n= 3 population = 2500.0 pour l'année 2028  
Pour n= 4 population = 2400.0 pour l'année 2029  
Pour n= 5 population = 2333.3333333333335 pour l'année 2030  
Pour n= 6 population = 2285.714285714286 pour l'année 2031  
Pour n= 7 population = 2250.0 pour l'année 2032

Pour n= 8 population = 2222.222222222222 pour l'année 2033  
 Pour n= 9 population = 2200.0 pour l'année 2034  
 Pour n= 10 population = 2181.8181818181815 pour l'année 2035  
 Pour n= 11 population = 2166.6666666666665 pour l'année 2036  
 Pour n= 12 population = 2153.846153846154 pour l'année 2037  
 Pour n= 13 population = 2142.8571428571427 pour l'année 2038  
 Pour n= 14 population = 2133.3333333333335 pour l'année 2039  
 Pour n= 15 population = 2125.0 pour l'année 2040

B) On définit l'équation différentielle et on résout avec Maxima :

```
(% i11) eqd : 'diff(y,t)+y=2;
```

```
(eqd)  $\frac{d}{dt}y + y = 2$ 
```

```
(% i12) sol :ode2(eqd, y, t);
```

```
(sol)  $y = \%e^{-t} (\%c + 2\%e^t)$ 
```

```
(% i13) sol_part : ic1(sol, t=0, y=4);
```

```
(sol_part)  $y = \%e^{-t} (2\%e^t + 2)$ 
```

```
(% i14) expand(sol_part);
```

```
(%o14)  $y = 2\%e^{-t} + 2$ 
```

```
(% i15) limit(sol_part,t,inf);
```

```
(%o15)  $y = 2$ 
```

Il y a aussi une stabilisation à 2000 perches, donc pas d'élimination avec ce modèle.

### 3 Exercice 3

```
(% i16) kill(all)$
```

```
(% i1) /*package pour la géométrie analytique 3d en lycée à télécharger sur maxima-french-doc.fr*/  
load(geomana3d);
```

La commande info\_ package\_ geom3d() donne les informations de ce package - Version 2.5

```
(%o1) /home/mgosse2/.maxima/geomana3d.mac
```

```
(% i2) /*supprime les explications sur les calculs effectués fournis par le package . */  
bavard :1$
```

```
(% i5) B :[-1,1,0]$C :[1,1,0]$$ :[0,0,2]$
```

#### 3.1 Partie A

```
(% i6) A :[-1,-1,0];
```

```
(A) [-1, -1, 0]
```

```
(% i7) D :[1,-1,0];
```

```
(D) [1, -1, 0]
```

```
(% i8) ps1 :produit_scalaire(C-S,B-S)$
```

Si  $u(x,y,z)$  et  $v(x',y',z')$  alors le produit scalaire est égal à  $xx'+yy'+zz'$

Le produit scalaire des deux vecteurs est égal à 4

$\cos(\text{BSC}) = \frac{\text{vecteur}(\text{SC}) \cdot \text{vecteur}(\text{SB})}{(\text{norme}(\text{SC}) * \text{norme}(\text{SB}))}$

```
(% i9) cos :ps1/(normev(C-S)*normev(B-S));
```

```
(cos)  $\frac{2}{3}$ 
```

```
(% i10) cos1 :float(acos(cos));
```

```
(cos1) 0.8410686705679303
```

On obtient le résultat en radians, à convertir en degrés, puis arrondi au dixième de degré

```
(% i11) cos2 :float(180*cos1/%pi);
```

```
(cos2) 48.189685104221404
```

```
(% i12) float(round(10*cos2)/10);
```

```
(%o12) 48.2
```

## 3.2 Partie B

```
(% i13) n :[0,2,1]$
```

```
(% i14) is_normal(n,S,B,C)$
```

Pour savoir si un vecteur est normal à un plan, on prouve que ce vecteur est orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan, en calculant le produit scalaire qui doit être nul

produit scalaire 1 :  $[0, 2, 1] \cdot [-1, 1, -2] = 0$

produit scalaire 2 :  $[0, 2, 1] \cdot [1, 1, -2] = 0$

Ce vecteur est bien normal au plan

```
(% i15) eq :equation_plan2(n,S)$
```

Un plan a pour équation de manière générale  $ax+by+cz+d=0$

Les coordonnées du vecteur normal donnent respectivement les coefficients de  $x$ ,  $y$  et  $z$

On trouve  $d$  en résolvant l'équation obtenue en remplaçant  $x$ ,  $y$  et  $z$  par les coordonnées du point.

Valeur calculée de la constante  $d$  :  $-2$

Une équation du plan défini par ce vecteur normal et ce point est donc :  $z+2y-2=0$

$n$  est donc un vecteur directeur de cette droite qui passe par  $O$ . On trouve donc d'après le cours la réponse

```
(% i17) O :[0,0,0]$d :equation_droite(O,n,t)$
```

Equations paramétriques de la droite :  $[x=0, y=2t, z=t, t]$

Méthode 1 : utilisation de la fonction projeté orthogonal d'un point sur un plan inclus dans le package

```
(% i18) H :proj_ortho(O,eq) $
```

On trouve un système d'équations paramétriques de la droite passant par le point dirigée par un vecteur normal au plan puis on cherche le point d'intersection de cette droite avec le plan.

Equation de la droite perpendiculaire au plan passant par le point :  $[x=0, y=2t, z=t, t]$

Coordonnées du point d'intersection :  $\left[0, \frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right]$

Méthode 2 : on cherche l'intersection de la droite (OH) avec le plan (SBC) en résolvant le système d'équations :

(% i19) intersection\_plan\_droite(d,eq)\$

On résout le système d'équations formé par les équations de la droite et celle du plan.

Coordonnées du point d'intersection :  $\left[ x=0, y=\frac{4}{5}, z=\frac{2}{5} \right]$

Valeur du paramètre  $t = \frac{2}{5}$

(% i20) l :norme(H,O)\$

Longueur du segment :  $\frac{2}{\sqrt{5}}$

On trouve bien la valeur annoncée

(% i21) 1-2\*sqrt(5)/5;

(%o21) 0

### 3.3 Partie C

La pyramide SABCD est à base carrée et de hauteur OS, donc

(% i22) h1 :norme(O,S)\$

Longueur du segment : 2

(% i23) V1 :1/3\*2^2\*h1;

(V1)  $\frac{8}{3}$

D'après les données, la base OCB de la pyramide OCBS est égale au quart de l'aire du carré ABCD, et la hauteur associée est toujours OS, donc son volume est le quart du volume de SABCD :

(% i24) V2 :V1/4;

(V2)  $\frac{2}{3}$

On montre que le triangle SBC est isocèle de hauteur SJ et on calcule son aire

(% i25) J :(B+C)/2;

(J) [0, 1, 0]

(% i29) c1 :norme(S,B)\$c2 :norme(S,C)\$hauteur :norme(S,J)\$base :norme(B,C)\$

Longueur du segment :  $\sqrt{6}$

Longueur du segment :  $\sqrt{6}$

Longueur du segment :  $\sqrt{5}$

Longueur du segment : 2

(% i30) aire :base\*hauteur/2;

(aire)  $\sqrt{5}$

Pour calculer le volume de la pyramide OCBS, on prend comme base SBC avec la hauteur associée OH (on appelle sa longueur IOH)

(% i31) V3 :1/3\*aire\*IOH;

(V3)  $\frac{\sqrt{5}IOH}{3}$

Il suffit d'égaliser les deux expressions du volume de la pyramide OCBS pour trouver cette longueur IOH :

```
(% i32) solve(V2=V3,IOH);
```

```
(%o32) 
$$\left[ \text{IOH} = \frac{2}{\sqrt{5}} \right]$$

```

On retrouve bien la même valeur attendue et qui est identique à celle obtenue dans la partie précédente.

### 3.4 Exercice 4

```
(% i33) kill(all)$
```

On définit la fonction, sa fonction dérivée, et la fonction tangente au point d'abscisse 1 :

```
(% i1) f(x) :=5*log(x^2+1)-3*x;
```

```
(%o1)  $f(x) := 5 \log(x^2 + 1) - 3x$ 
```

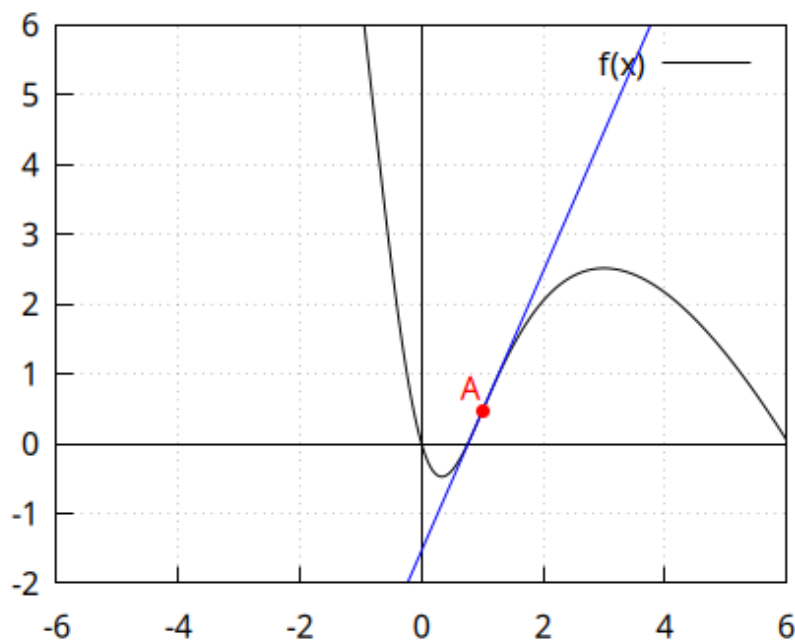
```
(% i2) define(fp(x),diff(f(x),x));
```

```
(%o2)  $fp(x) := \frac{10x}{x^2 + 1} - 3$ 
```

```
(% i3) tangente(x) :=fp(1)*(x-1)+f(1);
```

```
(%o3)  $tangente(x) := fp(1)(x - 1) + f(1)$ 
```

```
(% i23) wxdraw2d(  
  grid=true,  
  xaxis=true,  
  yaxis=true,  
  xrange=[-6,6],  
  yrange=[-2,6],  
  color=black,  
  line_width=1,  
  key= f(x) ,  
  explicit(f(x),x,-6,6),  
  key= ,  
  explicit(0,x,-6,6),  
  parametric(0,t,t,-3,6),  
  color=blue,  
  line_width=1,  
  explicit(tangente(x),x,-5,5),  
  color=red,  
  point_type=7,  
  point_size=1,  
  points([[1,f(1)]]),  
  label([ A ,0.8,0.8])  
)$
```



(%t23)

1) D'après le graphique, on conjecture que  $f$  est convexe sur  $] -\infty; 1]$  et concave après.

(% i26) `'limit('f(x),x,minf)=limit(f(x),x,minf);`

(%o26)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$

2) Somme de deux limites tendant vers  $+\infty$

(% i27) `f(x);`

(%o27)  $5 \log(x^2 + 1) - 3x$

(% i29) `g(x) := x*(10*log(x)/x-3)+5*log(1+1/x^2);`

(%o29)  $g(x) := x \left( \frac{10 \log(x)}{x} - 3 \right) + 5 \log \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right)$

2) On utilise la commande `radcan` qui normalise les expressions logarithmiques et radicales

(% i35) `radcan(g(x));`

(%o35)  $5 \log(x^2 + 1) - 3x$

$\ln(x)/x$  et  $1/x^2$  tendant vers 0 en  $+\infty$ , la limite se trouve facilement

(% i36) `'limit('f(x),x,inf)=limit(f(x),x,inf);`

(%o36)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$

4) On transforme l'expression de  $f'$ , dérivée de  $f$  pour obtenir la forme attendue :

(% i37) `fp(x);`

(%o37)  $\frac{10x}{x^2 + 1} - 3$

(% i42) `expr : factor(fp(x));`

`- expand(num(expr)) / denom(expr);`

(expr)  $-\left( \frac{(x-3)(3x-1)}{x^2+1} \right)$

(%o42)  $\frac{3x^2 - 10x + 3}{x^2 + 1}$

Le signe de  $f'(x)$  est donc celui du trinôme  $3x^2 - 10x + 3$  puisque le dénominateur est positif.

(% i44) `solve(num(expr)=0,x);`

(%o44)  $\left[ x = \frac{1}{3}, x = 3 \right]$

Le trinôme a 2 racines réelles et le coefficient de  $x^2$  est positif, donc  $f'(x) > 0$  sur  $[-1/3; 3]$  et négatif ailleurs.  $f$  est donc croissante sur cet intervalle et décroissante sur les deux intervalles  $]-\infty; -1/3]$  et  $[3; +\infty[$ .

```
(% i45) fs(x) :=diff(f(x),x,2);
```

```
(%o45) f s(x) :=  $\frac{d^2}{dx^2} f(x)$ 
```

```
(% i46) fs(x);
```

```
(%o46)  $\frac{10}{x^2 + 1} - \frac{20x^2}{(x^2 + 1)^2}$ 
```

```
(% i48) expr2 :factor(fs(x));
```

```
(expr2)  $-\left(\frac{10(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}\right)$ 
```

```
(% i50) expand(num(expr2)) / denom(expr2);
```

```
(%o50)  $\frac{10 - 10x^2}{(x^2 + 1)^2}$ 
```

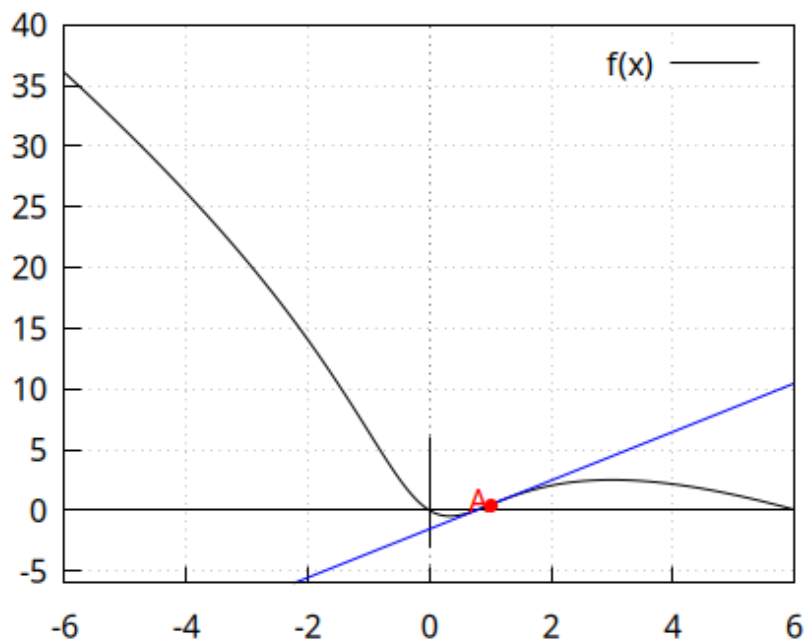
5) On a bien vérifié que la dérivée seconde de  $f$  a bien la forme proposée. Son signe est celui du numérateur, qui est un trinôme qui a 2 racines réelles et dont le coefficient devant  $x^2$  est négatif

```
(% i52) solve(num(expr2)=0,x);
```

```
(%o52)  $[x = -1, x = 1]$ 
```

$f$  est positive sur  $[-1; 1]$  et négative sur les deux intervalles restants, avec deux points d'inflexion en  $-1$  et  $1$  (annulation et changement de signe de la dérivée de  $f$ ). Donc  $f$  est convexe sur  $[-1; 1]$  et concave sur les autres intervalles. La conjecture émise à la question 1) est donc fautive, il y a un problème d'échelle. On retrace le graphe avec une échelle adaptée pour visualiser le résultat de nos calculs :

```
(% i57) wxdraw2d(
  grid=true,
  xaxis=true,
  yaxis=true,
  xrange=[-6,6],
  yrange=[-6,40],
  color=black,
  line_width=1,
  key= f(x) ,
  explicit(f(x),x,-6,6),
  key= ,
  explicit(0,x,-6,6),
  parametric(0,t,t,-3,6),
  color=blue,
  line_width=1,
  explicit(tangente(x),x,-5,6),
  color=red,
  point_type=7,
  point_size=1,
  points([[1,f(1)]]),
  label([ A ,0.8,0.8])
)$
```



(%t57)

Equation de la tangente à Cf au point d'abscisse 1 :

(% i59) `expand(tangente(x));`

(%o59)  $2x + 5\log(2) - 5$

Pour  $x \geq 1$ , f est concave, donc la courbe est en-dessous de sa tangente en 1. On en déduit l'inéquation

(% i64) `print(f(x), =< ,tangente(x))$`

$5\log(x^2 + 1) - 3x \leq 2(x - 1) + 5\log(2) - 3$

On ajoute  $3x$  à chaque membre de l'inégalité et on divise par 5 ensuite :

(% i70) `print((f(x)+3*x)/5, =< ,(tangente(x)+3*x)/5)$`

$\log(x^2 + 1) \leq \frac{3x + 2(x - 1) + 5\log(2) - 3}{5}$

Il reste à simplifier le membre de droite de cette inégalité :

(% i77) `print((f(x)+3*x)/5, =< ,ratsimp(expand(tangente(x)+3*x)/5))$`

$\log(x^2 + 1) \leq x + \log(2) - 1$