BACCALAURÉAT 2026 AMÉRIQUE DU NORD SPÉCIALITÉ MATHS SUJET 2 CORRECTION DE L'EXERCICE 3

La correction de cet exercice montre l'utilisation du package geomana3d.mac qui fournit des commandes permettant la résolution par les étudiants des exercices de géométrie analytique en 3D des programmes du lycée. On laisse la variable bavard à 1 afin que le logiciel explique les démarches suivies pour la résolution des questions. On charge le paquetage :

(% i1) load(geomana3d)$

La commande info_ package_ geom3d() donne les informations de ce package - Version 2.5

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.
On considère :

- les points $A(4\,;2\,;2)$, $B(5\,;-2\,;3)$ et $C(1\,;1\,;1)$;
- la droite Δ dont une représentation paramétrique est donnée par
$$\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 1+t \\ z = 1+2t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R} \quad ;$$
- le plan $\mathcal{P}$ passant par le point A et perpendiculaire à la droite Δ.

1. Vérifier que la droite Δ passe par le point $C(1\,;1\,;1)$ mais pas par le point A.

2. a. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est $2x+y+2z-14=0$.
   b. Vérifier que le plan $\mathcal{P}$ passe par le point B mais pas par le point C.

3. On considère le point $D(3\,;2\,;3)$.
   a. Démontrer que le point D est le projeté orthogonal du point C sur le plan $\mathcal{P}$.
   b. Justifier que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.
   c. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$.
   d. Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$.
   On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par $V=\frac{1}{3}\times B\times h$ où B est l'aire d'une base du tétraèdre et h la hauteur relative à cette base.

4. On appelle H le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC).
   a. Vérifier que les coordonnées du point H sont $\left(\frac{73}{29}\,;\frac{-4}{29}\,;\frac{51}{29}\right)$.
   b. Démontrer que l'aire du triangle ABC est $\frac{3\sqrt{22}}{2}$.
   c. En déduire la distance du point D au plan (ABC).

FIGURE 1 – enonce.png

1) On saisit les données du texte et on vérifie que C est sur la droite, et que A ne l'est pas

(% i5) A :[4,2,2]$B :[5,-2,3]$C :[1,1,1]$delta :[x=1+2*t,y=1+t,z=1+2*t,t]$

(% i7) is_point_droite(C,delta)$

On cherche s'il existe une valeur du paramètre pour lequel les équations paramétriques donnent les coordonnées du point, en résolvant le système linéaire correspondant.

$solve : dependentequationseliminated : (32)$
Le système admet une solution pour $t = 0$
donc le point $[1\,,1\,,1]$ appartient à la droite.

(% i8) is_point_droite(A,delta)$

On cherche s'il existe une valeur du paramètre pour lequel les équations paramétriques donnent les coordonnées du point, en résolvant le système linéaire correspondant.
Il n'existe pas de valeur du paramètre vérifiant les 3 équations, donc le point n'appartient pas à la droite.
2) Le plan P passe par A et a pour vecteur normal un vecteur directeur de delta :

(% i10) n :vecteur_directeur_droite(delta)$

Les coefficients devant le paramètre de la droite donnent par lecture un vecteur directeur.
Un vecteur directeur de la droite a pour coordonnées $[2,1,2]$

(% i12) eqP :equation_plan2(n,A) $

Un plan a pour équation de manière générale ax+by+cz+d=0
Les coordonnées du vecteur normal donnent respectivement les coefficients de x, y et z
On trouve d en résolvant l'équation obtenue en remplaçant x, y et z par les coordonnées du point.
Valeur calculée de la constante d : -14
Une équation du plan défini par ce vecteur normal et ce point est donc : $2z+y+2x-14=0$

(% i14) is_point_plan_eq(B,eqP)$

On teste si les coordonnées du point vérifient l'équation du plan. 2 x 5 + 1 x -2 + 2 x 3 + -14 = 0
donc le point appartient au plan.

(% i15) is_point_plan_eq(C,eqP)$

On teste si les coordonnées du point vérifient l'équation du plan. 2 x 1 + 1 x 1 + 2 x 1 + -14 = -9
Le point n'appartient pas au plan.
3) a) On vérifie que D appartient au plan P et que le vecteur CD est normal au plan.

(% i16) D :[3,2,3]$

(% i17) is_point_plan_eq(D,eqP)$

On teste si les coordonnées du point vérifient l'équation du plan. 2 x 3 + 1 x 2 + 2 x 3 + -14 = 0
donc le point appartient au plan.

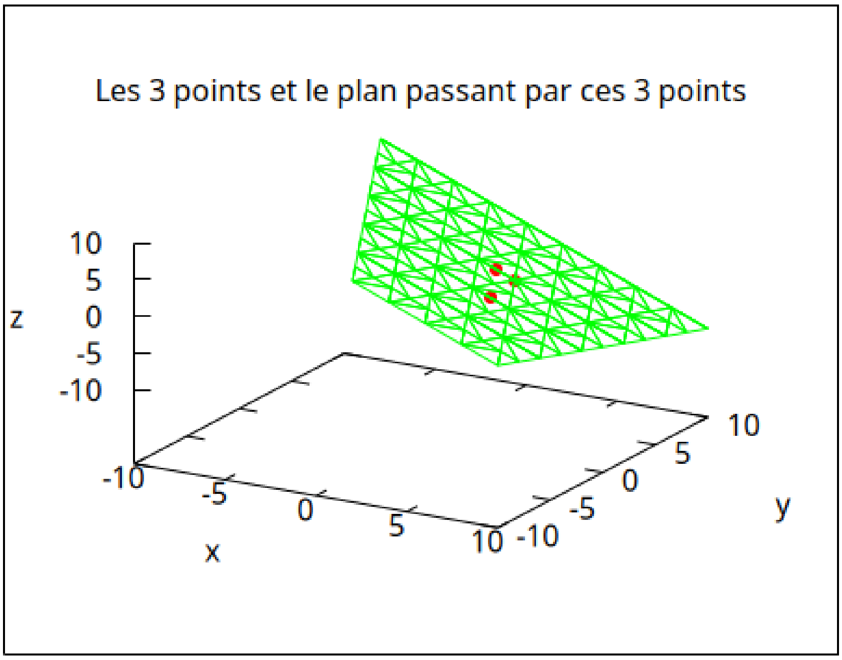
(% i19) vectCD :D-C;
$(vectCD)$ $[2,1,2]$

(% i21) is_colineaire(vectCD,n)$

Pour savoir si deux vecteurs sont colinéaires, on cherche si leurs coordonnées sont proportionnelles.
Ces deux vecteurs sont colinéaires.
On a en effet : $[2,1,2]$ = 1 × $[2,1,2]$
3) b) A, B, D appartenant à un même plan, vérifions qu'ils le définisssent bien

(% i23) is_plan(A,B,D)$

Les 3 points $[4,2,2]$, $[5,-2,3]$ et $[3,2,3]$ forment bien un plan.
En effet, les trois points ne sont pas alignés. Pour le démontrer, on peut définir deux vecteurs directeurs à partir des 3 points et vérifier qu'ils ne sont pas colinéaires.
Vecteur normal au plan : $[-4,-2,-4]$
Equation du plan : $-(4z)-2y-4x+28=0$



$(\%t23)$

On en conclut que A,B et D définissent le plan P. Comme C n'appartient pas à ce plan, on en conclut bien que ces 4 points ne sont pas coplanaires.

3) c) On définit les deux vecteurs et on calcule leur produit scalaire :

(% i26) vectAB :B-A ;vectAD :D-A ;

$(vectAB)$ $[1\,,-4\,,1]$

$(vectAD)$ $[-1\,,0\,,1]$

(% i28) produit_scalaire(vectAB,vectAD)$

Si u(x,y,z) et v(x',y',z') alors le produit scalaire est égal à xx'+yy'+zz'
Le produit scalaire des deux vecteurs est égal à 0
3) d) Les droites (AB) et (AC) sont donc perpendiculaires. Le volume du tétraèdre ABCD peut donc se calculer en prenant comme base le triangle ABD et comme hauteur [CD] (d'après les questions précédentes car D est le projeté orthogonal de C sur P) :

(% i30) AireABD :1/2*norme2(A,B)*norme2(A,D) ;

$(AireABD)$ 3

(% i31) Volume1 :1/3*AireABD*norme2(C,D) ;

$(Volume1)$ 3

4) a) On définit H et on vérifie que H appartient à la droite (BC) et que (AH) est perpendiculaire à (BC) :

(% i32) H :[73/29,-4/29,51/29]$

(% i35) vectHB :B-H ;vectHC :C-H ;

$(vectHB)$ $\left[\frac{72}{29}\,,-\left(\frac{54}{29}\right)\,,\frac{36}{29}\right]$

$(vectHC)$ $\left[-\left(\frac{44}{29}\right)\,,\frac{33}{29}\,,-\left(\frac{22}{29}\right)\right]$

(% i37) is_colineaire(vectHB,vectHC)$

Pour savoir si deux vecteurs sont colinéaires, on cherche si leurs coordonnées sont proportionnelles.

Ces deux vecteurs sont colinéaires.
On a en effet : $\left[\frac{72}{29}, -\left(\frac{54}{29}\right), \frac{36}{29}\right] = -\left(\frac{18}{11}\right) \times \left[-\left(\frac{44}{29}\right), \frac{33}{29}, -\left(\frac{22}{29}\right)\right]$

(% i43) vectAH :H-A ;vectBC :C-B ;

$(vectAH)\quad \left[-\left(\frac{43}{29}\right), -\left(\frac{62}{29}\right), -\left(\frac{7}{29}\right)\right]$

$(vectBC)\quad [-4, 3, -2]$

(% i45) produit_scalaire(vectAH,vectBC)$

Si u(x,y,z) et v(x',y',z') alors le produit scalaire est égal à xx'+yy'+zz'
Le produit scalaire des deux vecteurs est égal à 0
4) b) On considère [BC] comme base du triangle ABC avec comme hauteur associée [AH] :

(% i46) AireABC :1/2*norme2(B,C)*norme2(A,H) ;

$(AireABC)\quad \frac{3\sqrt{22}}{2}$

4) c) De manière classique, on calcule cette fois le volume du tétraèdre ABCD en prenant comme base ABC et comme hauteur d égale à la distance du point D au plan ABC.

(% i47) Volume2 :1/3*AireABC*d ;

$(Volume2)\quad \frac{\sqrt{22}d}{2}$

(% i50) reponse :solve(Volume1=Volume2,d) ;

$(reponse)\quad \left[d = \frac{6}{\sqrt{22}}\right]$

(% i53) reponse2 :radcan(rhs(reponse[1])) ;

$(reponse2)\quad \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$

(% i87)
```
wxdraw3d(
title = Tétraèdre ABCD ,
surface_hide = true,
enhanced3d = false,
colorbox = false,
proportional_axes = xyz,
view = [60, 120],
point_type = 7,
point_size = 1.5,
color = black,
points([A,B,C,D]),
line_width = 2,
color = blue,
points_joined = true, points([A,B,C,A]),
points_joined = false,
color = red,
points_joined = true, points([A,D]),
points([B,D]),
points([C,D]),
points_joined = false,
fill_color = cyan,   transparent = true, triangle(A,B,C),
fill_color = green,  transparent = true, triangle(A,B,D),
fill_color = yellow, transparent = true, triangle(A,C,D),
fill_color = orange, transparent = true, triangle(B,C,D),
color = black,
label([ A , A[1], A[2], A[3]-0.5]),
label([ B , B[1], B[2], B[3]+0.6]),
label([ C , C[1], C[2]+0.5, C[3]]),
label([ D , D[1], D[2], D[3]+0.6])
)$
```

(%t87)