

CRIBLE D'ÉRATOSTHÈNE

Crible d'Ératosthène

Principe : Le crible d'Ératosthène est un algorithme de l'Antiquité (III^e siècle av. J.-C.) permettant de trouver tous les nombres premiers inférieurs à un entier n donné.

Le principe est le suivant :

1. On écrit tous les entiers de 2 à n (1 n'est pas premier, on l'écarte).
2. On prend le premier nombre non barré (2) : c'est un nombre premier ; on barre tous ses multiples.
3. On passe au nombre non barré suivant (3) : premier aussi ; on barre tous ses multiples.
4. On répète l'opération pour chaque nombre non barré suivant.
5. On s'arrête dès que le nombre courant dépasse \sqrt{n} , car tout nombre inférieur à n admet nécessairement un diviseur premier inférieur ou égal à \sqrt{n} .

À la fin, tous les entiers non barrés sont exactement les nombres premiers inférieurs à n .

La fonction `crible_affiche3(n)` exécute cet algorithme étape par étape, en affichant les résultats au fur et à mesure. Le résultat final donne donc la liste des entiers non barrés, qui sont les nombres premiers inférieurs à n .

Programme Maxima

```
(% i1) crible_affiche3(n) := block(
[L, p, m, M0, M1, M2, M3],
local(genere_matrice),

/* Définition locale de genere_matrice à l'intérieur du block */
genere_matrice(liste) := block(
[nb_lignes, M, i, j, k],
nb_lignes : max(1, ceiling(length(liste) / 10)),
M : zeromatrix(nb_lignes, 10),
for i : 1 thru nb_lignes do
for j : 1 thru 10 do
M[i, j] : ,
for k : 1 thru length(liste) do
M[ceiling(k/10), k - (ceiling(k/10) - 1)*10] : liste[k],
M
),

/* Corps du crible */
L : makelist(k, k, 1, n),
M0 : genere_matrice(L),
print( Ce programme affiche les étapes de réalisation du crible d'Ératosthène ),
print( On trouve les nombres premiers en éliminant les multiples du premier nombre rencontré ),
print( Crible de départ , M0),

L[1] : ,
M1 : genere_matrice(L),
print( 1 n'est pas premier donc , M1),

for p : 2 thru isqrt(n) do
if member(p, L) then (
for m : 2*p step p thru n do
L[m] : ,
M2 : genere_matrice(L),
print( On garde , p, et on élimine ses multiples , M2)
),

M3 : genere_matrice(L),
print( Crible d'Ératosthène finalisé donnant les nombres premiers inférieurs à , n),
print(M3)
)$
```

On entre la valeur entière de n (>1) choisie dans le programme pour obtenir le crible d'Ératosthène correspondant :

```
(% i9) crible_affiche3(100)$
```

Ce programme affiche les étapes de réalisation du crible d'Ératosthène

On trouve les nombres premiers en éliminant les multiples du premier nombre rencontré

	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr> <tr><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td><td>20</td></tr> <tr><td>21</td><td>22</td><td>23</td><td>24</td><td>25</td><td>26</td><td>27</td><td>28</td><td>29</td><td>30</td></tr> <tr><td>31</td><td>32</td><td>33</td><td>34</td><td>35</td><td>36</td><td>37</td><td>38</td><td>39</td><td>40</td></tr> <tr><td>41</td><td>42</td><td>43</td><td>44</td><td>45</td><td>46</td><td>47</td><td>48</td><td>49</td><td>50</td></tr> <tr><td>51</td><td>52</td><td>53</td><td>54</td><td>55</td><td>56</td><td>57</td><td>58</td><td>59</td><td>60</td></tr> <tr><td>61</td><td>62</td><td>63</td><td>64</td><td>65</td><td>66</td><td>67</td><td>68</td><td>69</td><td>70</td></tr> <tr><td>71</td><td>72</td><td>73</td><td>74</td><td>75</td><td>76</td><td>77</td><td>78</td><td>79</td><td>80</td></tr> <tr><td>81</td><td>82</td><td>83</td><td>84</td><td>85</td><td>86</td><td>87</td><td>88</td><td>89</td><td>90</td></tr> <tr><td>91</td><td>92</td><td>93</td><td>94</td><td>95</td><td>96</td><td>97</td><td>98</td><td>99</td><td>100</td></tr> </table>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10																																																																																												
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20																																																																																												
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30																																																																																												
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40																																																																																												
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50																																																																																												
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60																																																																																												
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70																																																																																												
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80																																																																																												
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90																																																																																												
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100																																																																																												
Crible de départ																																																																																																					
	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td></td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr> <tr><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td><td>20</td></tr> <tr><td>21</td><td>22</td><td>23</td><td>24</td><td>25</td><td>26</td><td>27</td><td>28</td><td>29</td><td>30</td></tr> <tr><td>31</td><td>32</td><td>33</td><td>34</td><td>35</td><td>36</td><td>37</td><td>38</td><td>39</td><td>40</td></tr> <tr><td>41</td><td>42</td><td>43</td><td>44</td><td>45</td><td>46</td><td>47</td><td>48</td><td>49</td><td>50</td></tr> <tr><td>51</td><td>52</td><td>53</td><td>54</td><td>55</td><td>56</td><td>57</td><td>58</td><td>59</td><td>60</td></tr> <tr><td>61</td><td>62</td><td>63</td><td>64</td><td>65</td><td>66</td><td>67</td><td>68</td><td>69</td><td>70</td></tr> <tr><td>71</td><td>72</td><td>73</td><td>74</td><td>75</td><td>76</td><td>77</td><td>78</td><td>79</td><td>80</td></tr> <tr><td>81</td><td>82</td><td>83</td><td>84</td><td>85</td><td>86</td><td>87</td><td>88</td><td>89</td><td>90</td></tr> <tr><td>91</td><td>92</td><td>93</td><td>94</td><td>95</td><td>96</td><td>97</td><td>98</td><td>99</td><td>100</td></tr> </table>		2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
	2	3	4	5	6	7	8	9	10																																																																																												
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20																																																																																												
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30																																																																																												
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40																																																																																												
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50																																																																																												
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60																																																																																												
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70																																																																																												
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80																																																																																												
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90																																																																																												
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100																																																																																												
1 n'est pas premier donc																																																																																																					
	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td></td><td>2</td><td>3</td><td>5</td><td>7</td><td>9</td></tr> <tr><td>11</td><td>13</td><td>15</td><td>17</td><td>19</td><td></td></tr> <tr><td>21</td><td>23</td><td>25</td><td>27</td><td>29</td><td></td></tr> <tr><td>31</td><td>33</td><td>35</td><td>37</td><td>39</td><td></td></tr> <tr><td>41</td><td>43</td><td>45</td><td>47</td><td>49</td><td></td></tr> <tr><td>51</td><td>53</td><td>55</td><td>57</td><td>59</td><td></td></tr> <tr><td>61</td><td>63</td><td>65</td><td>67</td><td>69</td><td></td></tr> <tr><td>71</td><td>73</td><td>75</td><td>77</td><td>79</td><td></td></tr> <tr><td>81</td><td>83</td><td>85</td><td>87</td><td>89</td><td></td></tr> <tr><td>91</td><td>93</td><td>95</td><td>97</td><td>99</td><td></td></tr> </table>		2	3	5	7	9	11	13	15	17	19		21	23	25	27	29		31	33	35	37	39		41	43	45	47	49		51	53	55	57	59		61	63	65	67	69		71	73	75	77	79		81	83	85	87	89		91	93	95	97	99																																									
	2	3	5	7	9																																																																																																
11	13	15	17	19																																																																																																	
21	23	25	27	29																																																																																																	
31	33	35	37	39																																																																																																	
41	43	45	47	49																																																																																																	
51	53	55	57	59																																																																																																	
61	63	65	67	69																																																																																																	
71	73	75	77	79																																																																																																	
81	83	85	87	89																																																																																																	
91	93	95	97	99																																																																																																	
On garde 2 et on élimine ses multiples																																																																																																					
	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td></td><td>2</td><td>3</td><td>5</td><td>7</td></tr> <tr><td>11</td><td>13</td><td></td><td>17</td><td>19</td></tr> <tr><td></td><td>23</td><td>25</td><td></td><td>29</td></tr> <tr><td>31</td><td></td><td>35</td><td>37</td><td></td></tr> <tr><td>41</td><td>43</td><td></td><td>47</td><td>49</td></tr> <tr><td></td><td>53</td><td>55</td><td></td><td>59</td></tr> <tr><td>61</td><td></td><td>65</td><td>67</td><td></td></tr> <tr><td>71</td><td>73</td><td></td><td>77</td><td>79</td></tr> <tr><td></td><td>83</td><td>85</td><td></td><td>89</td></tr> <tr><td>91</td><td></td><td>95</td><td>97</td><td></td></tr> </table>		2	3	5	7	11	13		17	19		23	25		29	31		35	37		41	43		47	49		53	55		59	61		65	67		71	73		77	79		83	85		89	91		95	97																																																			
	2	3	5	7																																																																																																	
11	13		17	19																																																																																																	
	23	25		29																																																																																																	
31		35	37																																																																																																		
41	43		47	49																																																																																																	
	53	55		59																																																																																																	
61		65	67																																																																																																		
71	73		77	79																																																																																																	
	83	85		89																																																																																																	
91		95	97																																																																																																		
On garde 3 et on élimine ses multiples																																																																																																					
	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td></td><td>2</td><td>3</td><td>5</td><td>7</td></tr> <tr><td>11</td><td>13</td><td></td><td>17</td><td>19</td></tr> <tr><td></td><td>23</td><td></td><td></td><td>29</td></tr> <tr><td>31</td><td></td><td></td><td>37</td><td></td></tr> <tr><td>41</td><td>43</td><td></td><td>47</td><td>49</td></tr> <tr><td></td><td>53</td><td></td><td></td><td>59</td></tr> <tr><td>61</td><td></td><td>65</td><td>67</td><td></td></tr> <tr><td>71</td><td>73</td><td></td><td>77</td><td>79</td></tr> <tr><td></td><td>83</td><td>85</td><td></td><td>89</td></tr> <tr><td>91</td><td></td><td>95</td><td>97</td><td></td></tr> </table>		2	3	5	7	11	13		17	19		23			29	31			37		41	43		47	49		53			59	61		65	67		71	73		77	79		83	85		89	91		95	97																																																			
	2	3	5	7																																																																																																	
11	13		17	19																																																																																																	
	23			29																																																																																																	
31			37																																																																																																		
41	43		47	49																																																																																																	
	53			59																																																																																																	
61		65	67																																																																																																		
71	73		77	79																																																																																																	
	83	85		89																																																																																																	
91		95	97																																																																																																		
On garde 5 et on élimine ses multiples																																																																																																					
	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td></td><td>2</td><td>3</td><td>5</td><td>7</td></tr> <tr><td>11</td><td>13</td><td></td><td>17</td><td>19</td></tr> <tr><td></td><td>23</td><td></td><td></td><td>29</td></tr> <tr><td>31</td><td></td><td></td><td>37</td><td></td></tr> <tr><td>41</td><td>43</td><td></td><td>47</td><td>49</td></tr> <tr><td></td><td>53</td><td></td><td></td><td>59</td></tr> <tr><td>61</td><td></td><td></td><td>67</td><td></td></tr> <tr><td>71</td><td>73</td><td></td><td>77</td><td>79</td></tr> <tr><td></td><td>83</td><td></td><td></td><td>89</td></tr> <tr><td>91</td><td></td><td></td><td>97</td><td></td></tr> </table>		2	3	5	7	11	13		17	19		23			29	31			37		41	43		47	49		53			59	61			67		71	73		77	79		83			89	91			97																																																			
	2	3	5	7																																																																																																	
11	13		17	19																																																																																																	
	23			29																																																																																																	
31			37																																																																																																		
41	43		47	49																																																																																																	
	53			59																																																																																																	
61			67																																																																																																		
71	73		77	79																																																																																																	
	83			89																																																																																																	
91			97																																																																																																		

On garde 7 et on élimine ses multiples

	2	3	5	7	
11		13		17	19
		23			29
31				37	
41		43		47	
		53			59
61				67	
71		73			79
		83			89
				97	

Crible d'Ératosthène finalisé donnant les nombres premiers inférieurs à 100

	2	3	5	7	
11		13		17	19
		23			29
31				37	
41		43		47	
		53			59
61				67	
71		73			79
		83			89
				97	