BACCALAURÉAT 2026 MÉTROPOLE J2 SPÉCIALITÉ
CORRECTION DE L'EXERCICE 1

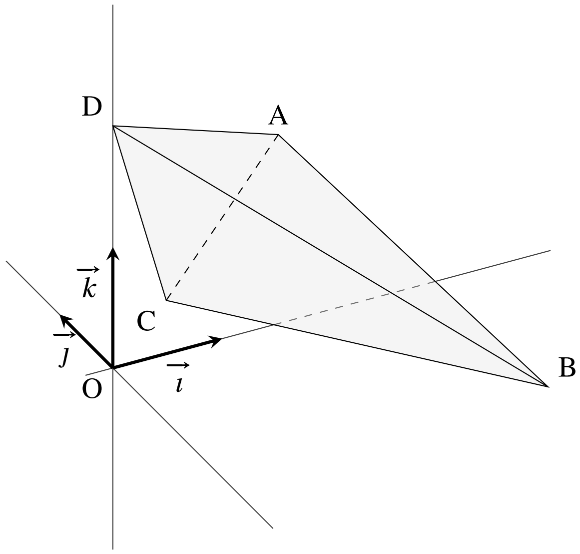
La correction de cet exercice montre l'utilisation du package **geomana3d.mac** qui fournit des commandes permettant la résolution par les étudiants des exercices de géométrie analytique en 3D des programmes du lycée.
On charge le paquetage :

```
-->    load( geomana3d.mac )$
```

La commande info_ package_ geom3d() donne les informations sur ce package.
Documentation en ligne du package geomana3d : **Accéder à la documentation**

Enoncé de l'exercice (Source : Annales de l'APMEP)

Dans le repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$, on considère les points : $A(2;1;1)$, $B(3;-2;0)$, $C(0;-1;1)$ et $D(0;0;2)$.



1. Montrer que les points A, B et C définissent un plan.

2. **a.** Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC).

b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est :

$$x-y+4z-5=0.$$

3. Vérifier qu'une représentation paramétrique de la droite Δ passant par D et orthogonale au plan (ABC) est donnée par :

$$\begin{cases} x=t \\ y=-t \\ z=2+4t \end{cases} \quad \text{avec } t\in\mathbb{R}.$$

4. Montrer que le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC) est le point $H\left(-\frac{1}{6};\frac{1}{6};\frac{4}{3}\right)$.

5. **a.** Montrer que le triangle ABC est isocèle en B.

b. Montrer que l'aire du triangle ABC est $3\sqrt{2}$.

6. **a.** En déduire que le volume du tétraèdre ABCD est égal à 1.

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par : $V = \frac{1}{3}\mathscr{B}h$, *où* $\mathscr{B}$ *est l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.*

b. On admet que la distance du point A au plan (BCD) est égale à $\sqrt{2}$.
En déduire l'aire du triangle BCD.

7. Dans cette question, on note D_k le point ayant pour coordonnées $(0;0;k)$, où k est un réel.

a. Déterminer la valeur de k pour laquelle les points A, B, C et D_k sont coplanaires.
Quel est alors le projeté orthogonal du point D_k sur le plan (ABC) ?

b. Peut-on trouver une valeur de k telle que A soit le projeté orthogonal de D_k sur le plan (ABC) ?

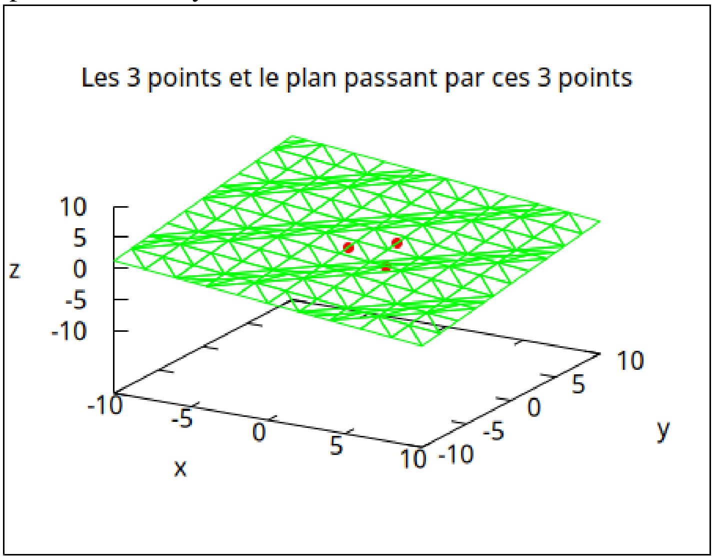
Résolution avec wxMaxima et le package geomana3d.mac

Question 1

On définit les points et on utilise la commande is_plan(A,B,C)

(% i5) A :[2,1,1]$B :[3,-2,0]$C :[0,-1,1]$D :[0,0,2]$
(% i6) is_plan(A,B,C)$

Les 3 points $[2,1,1]$, $[3,-2,0]$ et $[0,-1,1]$ forment bien un plan.
En effet, les trois points ne sont pas alignés. Pour le démontrer, on peut définir
deux vecteurs directeurs à partir des 3 points et vérifier qu'ils ne sont pas colinéaires.
Vecteur normal au plan : $[-2,2,-8]$
Equation du plan : $-(8z)+2y-2x+10=0$



(%t6)

Question 2

On définit le vecteur n et la commande is_normal(n,A,B,C) :

(% i7) n :[1,-1,4]$
(% i8) is_normal(n,A,B,C)$

Pour savoir si un vecteur est normal à un plan, on prouve que ce vecteur est orthogonal

à deux vecteurs directeurs du plan, en calculant le produit scalaire qui doit être nul
produit scalaire 1 : $[1,-1,4]\ .\ [1,-3,-1]\ = 0$
produit scalaire 2 : $[1,-1,4]\ .\ [-2,-2,0]\ = 0$
Ce vecteur est bien normal au plan
La commande equation_plan2(n,A) donne une équation du plan de vecteur normal n et passant par A. On l'affecte à la variable eqABC pour la réutiliser ultérieurement.

(% i9) eqABC :equation_plan2(n,A)$

Un plan a pour équation de manière générale ax+by+cz+d=0
Les coordonnées du vecteur normal donnent respectivement les coefficients de x, y et z
On trouve d en résolvant l'équation obtenue en remplaçant x, y et z par les coordonnées du point.
Valeur calculée de la constante d : -5
Une équation du plan défini par ce vecteur normal et ce point est donc : $4z-y+x-5=0$

Question 3

La droite passe par D et a pour vecteur directeur n. La commande equation_droite(M,u,t) renvoie une équation paramétrique de la droite passant par M, dirigée par u et exprimée avec le paramètre t. On la nomme eqdelta.

(% i10) eqdelta :equation_droite(D,n,t)$

Equations paramétriques de la droite : $[x=t, y=-t, z=4t+2, t]$

Question 4

Le point H est donc l'intersection de la droite Δ avec le plan ABC. La commande intersection_plan_droite(d,eq) renvoie les coordonnées du point d'intersection de la droite d (définie par une équation paramétrique) et du plan eq (défini par une équation cartésienne).

(% i11) H :intersection_plan_droite(eqdelta,eqABC)$

On résout le système d'équations formé par les équations de la droite et celle du plan.
Coordonnées du point d'intersection : $\left[x=-\left(\frac{1}{6}\right), y=\frac{1}{6}, z=\frac{4}{3}\right]$
Valeur du paramètre $t=-\left(\frac{1}{6}\right)$

Question 5

La commande norme(A,B) renvoie la longueur du segment [A,B] :

(% i12) norme(B,A)$

Longueur du segment : $\sqrt{11}$

(% i13) norme(B,C)$

Longueur du segment : $\sqrt{11}$
Le triangle ABC est donc isocèle en B. Son aire se calcule par AC*BI/2, ou I est le pied de la hauteur issue de B, qui se confond avec le milieu de [AC] dans ce cas particulier. On calcule les coordonnées de I puis l'aire :

(% i14) I :(A+C)/2 ;
$(I)\quad [1,0,1]$

(% i15) Aire :norme2(A,C)*norme2(B,I)/2 ;
$(Aire)\quad 3\sqrt{2}$

Question 6

D'après les questions précédentes, on choisit comme base du tétraèdre ABC et comme hauteur associée [DH]

(% i16) norme(D,H)$

Longueur du segment : $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(% i17) Volume :1/3*Aire*norme2(D,H) ;
$(Volume)\quad 1$
Ce volume se calcule aussi en prenant comme base du tétraèdre BCD et comme hauteur la distance de A au plan (BCD) :

(% i18) Volume2 :1/3*Aire2*sqrt(2) ;
$(Volume2)\quad \frac{\sqrt{2}\mathrm{Aire2}}{3}$

(% i19) solve(Volume=Volume2,Aire2) ;
$(\%o19)\quad \left[\mathrm{Aire2}=\frac{3}{\sqrt{2}}\right]$

(% i20) expr : 3/sqrt(2) ;
$(expr)\quad \frac{3}{\sqrt{2}}$

(% i21) expr2 :num(expr)*sqrt(2)/denom(expr)*sqrt(2) ;
$(expr2)\quad 3\sqrt{2}$

Question 7

(% i23) declare(k,constant)$Dk :[0,0,k]$
(% i24) eqABC ;
$(\%o24)\quad 4z-y+x-5=0$
Dk doit donc appartenir au plan ABC. On remplace x, y et z par les coordonnées de Dk dans l'équation de ABC :

(% i25) remplacer :sublis([x=Dk[1],y=Dk[2],z=Dk[3]],eqABC) ;
$(remplacer)\quad 4k-5=0$

(% i26) solve(remplacer,k) ;
$(\%o26)\quad \left[k=\frac{5}{4}\right]$
Seule la valeur 5/4 répond à cette condition. On calcule le vecteur ADk et on regarde s'il est colinéaire à n :

(% i27) Dk-A;
(%o27) $[-2,-1,k-1]$

(% i28) n;
(%o28) $[1,-1,4]$

(% i29) is_colineaire(Dk-A,n)$

Pour savoir si deux vecteurs sont colinéaires, on cherche si leurs coordonnées sont proportionnelles.
Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.
La réponse est donc négative, ce que l'on observe en regardant les coordonnées des deux vecteurs.