

wxMaxima pour l'Analyse Volume II

Auteur : Zachary Hannan, Solano Community College
Les corrections sont réalisées par Michel Gosse

Exercices du Chapitre 5 et leur corrigé

Présentation

Le manuel wxMaxima for Calculus Volume II, dont l'auteur est Zachary Hannan, propose l'étude de nombreux domaines de l'analyse à l'aide du logiciel Maxima et de son interface graphique wxMaxima. A l'occasion de la traduction française de ce manuel, la correction des exercices de chaque chapitre est proposée. Ce document reprend les exercices du manuel et leur correction à l'aide de wxMaxima.

La dernière version de ce document, ainsi que les fichiers source pour wxMaxima, sont téléchargeables sur le site <https://maxima-french-doc.fr/>, à la rubrique Documentation.

Enoncé des exercices

1. Pour la courbe définie par les équations paramétriques $x(t) = t^2$ et $y(t) = t - 2$, générer un ensemble de 21 points sur $[0, 2]$ en utilisant `makelist`. Tracer ces points avec la courbe paramétrique, et observer la liste des points pour déterminer le sens de parcours de la courbe.
2. Pour la courbe définie par les équations paramétriques $x(t) = 3 \cos(2t)$, $y(t) = 5 \sin(2t)$, déterminer l'intervalle minimal en t (à partir de zéro) sur lequel la courbe est fermée. Tracer cette courbe et construire plusieurs points afin d'illustrer le sens de parcours sur cette courbe. Enfin, transformer les équations et utiliser `trigsimp` pour éliminer le paramètre et trouver une équation ne dépendant que de x et y .
3. Tracer la courbe de Lissajous donnée par $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin(3t)$. Quel est le nombre de périodes pour chacune de ces fonctions lorsque t varie de 0 à 2π ?
4. Pour la courbe paramétrique de l'exemple précédent, trouver tous les points en lesquels la tangente a une pente égale à 1. Il sera utile par exemple de réaliser un tracé de `SLOPE(t)` et d'utiliser `find_root` pour obtenir toutes les valeurs de t pour lesquelles la pente est égale à 1. Enfin, construire le tracé de la courbe entière en noir ainsi que des droites tangentes en rouge.
5. Calculer la longueur d'arc de la courbe paramétrique de l'exemple précédent.
6. Les équations paramétriques $x(t) = t - 0.8 \sin t$, $y(t) = 1 - 0.8 \cos t$ définissent une *cycloïde raccourcie*. Trouver tous les points en lesquels les tangentes sont horizontales sur $[0, 2\pi]$, puis tracer la courbe en noir avec les tangentes horizontales représentées en rouge.
7. Calculer la longueur d'arc de la courbe paramétrique de l'exercice précédent.
8. Les équations paramétriques $x(t) = 1.7 \cos t + 0.4 \cos \frac{20t}{3}$, $y(t) = 1.7 \sin t - 0.4 \sin \frac{20t}{3}$ définissent une *hypocycloïde allongée* sur $[0, 6\pi]$. Tracer cette courbe et calculer sa longueur d'arc.
9. Tracer la courbe appelée *cardioïde* définie en coordonnées polaires par $r(\theta) = 1 - \sin \theta$. Tracer toutes les tangentes horizontales et verticales ainsi que la courbe. De plus, tracer et étiqueter clairement les points de tangence.
10. Calculez la longueur d'arc et l'aire intérieure de la courbe cardioïde de l'exemple précédent.
11. Tracez les courbes en rosace $r(\theta) = \cos(n\theta)$ pour $n = 2, 3, 4, 5$. Quel motif remarquez-vous dans les tracés ? Emettez une hypothèse pour $n = 16$ et produisez un traphique pour tester votre hypothèse.
12. Pour le cas $n = 16$ de l'exercice précédent, calculez l'aire d'un seul pétale et coloriez-le dans le style de l'Exemple 5.4.3.

13. Lorsqu'un objet est lancé depuis l'origine avec une vitesse v_0 selon un angle θ , la trajectoire est donnée par un ensemble d'équations paramétriques : $x(t) = v_0 \cos \theta \cdot t$ et $y(t) = v_0 \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$, où g est l'accélération de la pesanteur. En utilisant une vitesse de lancement de 100 m/s, un angle de lancement de 40° et $g \approx 9.8 \text{ m/s}^2$, tracer la trajectoire résultante de $t = 0$ jusqu'au moment où le projectile « atterrit » (c'est à dire lorsque $y = 0$).
14. Utiliser `makelist` pour tracer 90 trajectoires (toutes sur le même graphique) pour des projectiles lancés depuis l'origine à 100 m/s avec des angles initiaux $\theta = 1^\circ, 2^\circ, \dots, 90^\circ$. On supposera que les projectiles atterrissent en $y = 0$. Quel angle semble donner la portée maximale pour le projectile ?
15. L'équation différentielle d'un oscillateur harmonique non amorti est donnée par $x''(t) = -\frac{k}{m}x(t)$, où k est la constante de raideur du ressort et m est la masse de l'oscillateur. Pour un oscillateur de masse 0.2 kg et de constante de raideur 9 N/m, résoudre cette équation différentielle en utilisant `ode2`. Utiliser `ic2` pour appliquer les conditions initiales $x(0) = 0.15 \text{ m}$ et $v(0) = x'(0) = 2 \text{ m/s}$. Tracer un graphique montrant $x(t)$ et $v(t)$ dans deux couleurs différentes sur l'intervalle de t $[0, 10]$.

$x(t)$ et $v(t)$ forment un ensemble d'équations paramétriques pour l'oscillateur harmonique. On peut visualiser tout état de l'oscillateur en traçant les couples (x, v) sur un graphique appelé graphique de *l'espace des phases*. Utiliser `parametric` pour produire un graphique de l'espace des phases pour l'oscillateur harmonique.

16. On peut incorporer un amortissement dépendant de la vitesse à l'oscillateur harmonique de l'exercice précédent en ajoutant un terme d'amortissement à l'équation différentielle :

$$x''(t) = -\frac{k}{m}x(t) - b \cdot x'(t).$$

Reprendre en intégralité l'exercice précédent pour le même oscillateur, mais cette fois avec le terme d'amortissement $b = 0.3$ ajouté.

17. * Les animations permettent d'illustrer facilement le sens de parcours d'une courbe paramétrique. Utiliser le code suivant pour créer une animation illustrant comment la figure de Lissajous de l'exemple 5.1.3 est tracée lorsque t varie de 0 à 2π .

Les animations sont réalisées en dessinant une liste de « scènes graphiques » en séquence, chacune commençant par `gr2d`. Le code ci-dessous commence avec une liste vide, puis la boucle `do` utilise `append` pour ajouter une nouvelle scène pour chaque valeur de i . Chaque scène montre la courbe de Lissajous complète ainsi qu'un point rouge qui se déplace en 1000 étapes du point initial au point final de la courbe sur $[0, 2\pi]$. Enfin, `wxdraw` est utilisé pour générer le .gif animé. `delay` sert à contrôler la vitesse de l'animation (des valeurs plus petites indiquent un défilement plus rapide des scènes). Sur une machine Windows, le .gif animé devrait apparaître comme un fichier intitulé `maxout_n.gif` dans le dossier de l'utilisateur.

```
(%i1) x(t):=cos(7*t)$
      y(t):=sin(3*t)$
(%i2) scene:[]$

for i:0 thru 1000 do
  (scene: append(scene,[gr2d(
    grid=true,
    xaxis=true,
    yaxis=true,
    title="Une courbe de Lissajous.",
    color=black,
    nticks=600,
    dimensions=[600,600],
```

```

        parametric(cos(7*t), sin(3*t), t, 0, 2*%pi),
        color=red,
        point_type=7,
        points([[x(i*2*%pi/1000), y(i*2*%pi/1000)]]))
    ));

(%i4) draw(
    delay=5,
    file_name="lissajous_anim",
    terminal='animated_gif,
    scene
) $

```

NDT : Les nouvelles versions de wxMaxima ont introduit la commande `with_slider_draw` qui permet de réaliser directement une animation dans la feuille de travail sans avoir l'obligation de générer le fichier gif sur le pc et de le consulter après. Voici par exemple un exemple d'une telle commande, qui réalise la simulation précédente dans wxMaxima :

```

with_slider_draw(
    i, makelist(k, k, 0, 1000, 4),
    grid=true,
    xaxis=true,
    yaxis=true,
    title="Une courbe de Lissajous.",
    nticks=150,
    dimensions=[600, 600],
    color=black,
    parametric(cos(7*t), sin(3*t), t, 0, 2*%pi),
    color=red,
    point_type=filled_circle,
    points([[x(i*2*%pi/1000), y(i*2*%pi/1000)]]))
) $

```

18. * Une courbe de Lissajous est donnée par les équations paramétriques $x(t) = \cos(t+\phi)$, $y(t) = \sin(2t)$. Créer une animation montrant comment l'angle de phase ϕ affecte la courbe. Chaque scène doit montrer la courbe résultant d'un angle de phase différent, et l'animation doit parcourir les angles de phase de 0 à 2π en 100 incréments.
19. * Créer une animation montrant comment la rosace d'équation polaire $r(\theta) = 3 \cos(4\theta)$ est tracée sur $[0, 2\pi]$. Chaque scène de l'animation doit montrer la courbe sur $[0, i \cdot 2\pi/1000]$, afin que l'animation trace la courbe du début à la fin.

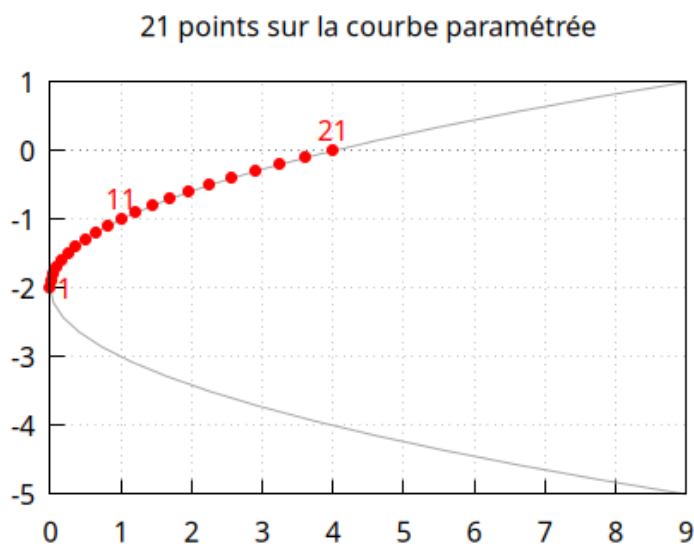
Corrigé des exercices

1 Exercice1

(% i2) `x(t) :=t^ 2$y(t) :=t-2$`

(% i3) `POINTS :makelist([x(0.1*n),y(0.1*n)],n,0,20)$`

```
(% i4) wxdraw2d(
  grid=true,
  xaxis=true,
  yaxis=true,
  title= 21 points sur la courbe paramétrée ,
  color=dark_grey,
  parametric(x(t),y(t),t,-3,3),
  color=red,
  point_type=7,
  points(POINTS),
  label([ 21 ,x(2),y(2)+0.3]),
  label([ 11 ,x(1),y(1)+0.3]),
  label([ 1 ,x(0)+0.2,y(0)])
);
```



```
(%t4)
```

```
(%o4)
```

On a représenté le premier point, le 11ième et le dernier. Cela donne donc le sens de parcours sur la courbe.

2 Exercice 2

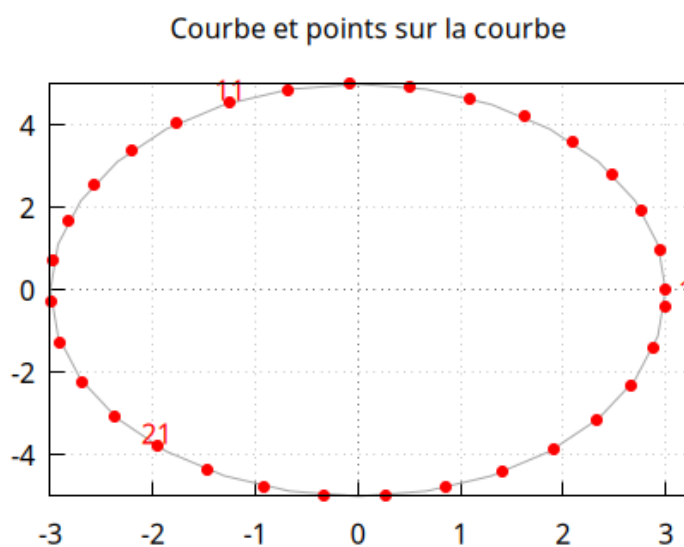
```
(% i5) kill(all)$
```

```
(% i2) x(t) :=3*cos(2*t)$y(t) :=5*sin(2*t)$
```

cosinus et sinus ont pour période 2π donc $\cos(2t)$ et $\sin(2t)$ ont comme période π

```
(% i3) POINTS :makelist([x(0.1*n),y(0.1*n)],n,0,31)$
```

```
(% i4) wxdraw2d(
      grid=true,
      xaxis=true,
      yaxis=true,
      title= Courbe et points sur la courbe ,
      color=dark_grey,
      parametric(x(t),y(t),t,0,%pi),
      color=red,
      point_type=7,
      points(POINTS),
      label([ 21 ,x(2),y(2)+0.3]),
      label([ 11 ,x(1),y(1)+0.3]),
      label([ 1 ,x(0)+0.2,y(0)])
    );
```



```
(%t4)
```

```
(%o4)
```

On reconnait une ellipse parcourue dans le sens anti-horaire.

```
(% i5) (x(t)/3)^ 2+(y(t)/5)^ 2;
```

```
(%o5) sin (2t)^ 2 + cos (2t)^ 2
```

```
(% i6) trigsimp(%);
```

```
(%o6) 1
```

```
(% i7) (x/3)^ 2+(y/5)^ 2=1;
```

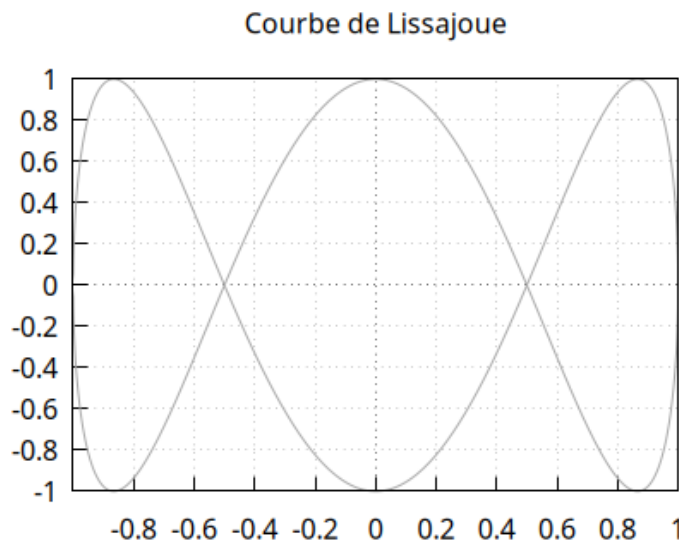
```
(%o7)  $\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{9} = 1$ 
```

3 Exercice 3

```
(% i8) kill(all)$
```

```
(% i2) x(t) :=cos(t)$y(t) :=sin(3*t)$
```

```
(% i3) wxdraw2d(
  grid=true,
  xaxis=true,
  yaxis=true,
  nticks=500,
  title= Courbe de Lissajoue ,
  color=dark_grey,
  parametric(x(t),y(t),t,0,2*%pi)
);
```



```
(%t3)
```

```
(%o3)
```

$x(t)$ a une seule période tandis que $y(t)$ en a 3 ($\sin(3t)$ périodique de période $2\pi/3$)

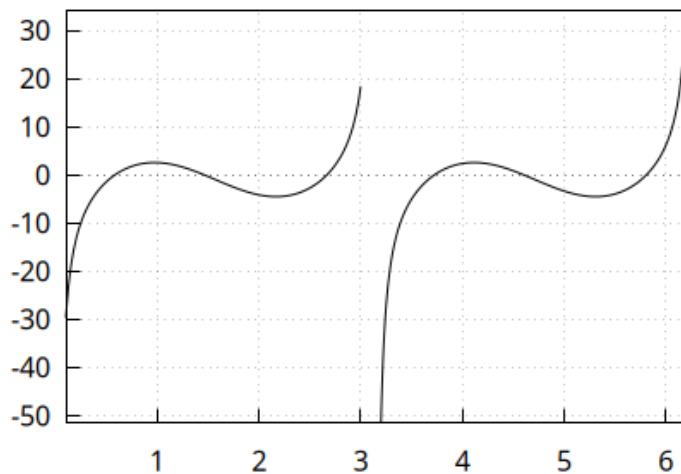
4 Exercice 4

```
(% i4) define(pente(a),subst(a,t,diff(y(t),t)/diff(x(t),t)));
```

```
(%o4) pente(a) := - \left( \frac{3 \cos(3a)}{\sin(a)} \right)
```

```
(% i5) wxdraw2d(
  grid=true,
  xaxis=true,
  yaxis=true,
  title= Représentation de la fonction pente(a)-1 ,
  color=black,
  explicit(pente(a)-1,a,0.1,3),
  explicit(pente(a)-1,a,3.2,6.2)
);
```

Représentation de la fonction pente(a)-1



(%t5)

(%o5)

On trouve 6 valeurs pour lesquelles pente(a)=1 sur $[0, 2\pi]$

```
(% i11) x1 :find_root(pente(a)=1,a,0.1,1);x2 :find_root(pente(a)=1,a,1,2);x3 :find_root(pente(a)=1,a,2,3);
        x4 :find_root(pente(a)=1,a,3.2,4);x5 :find_root(pente(a)=1,a,4,5);x6 :find_root(pente(a)=1,a,5,6);
```

(x1) 0.585337960226019

(x2) 1.458262501180979

(x3) 2.6687885189776916

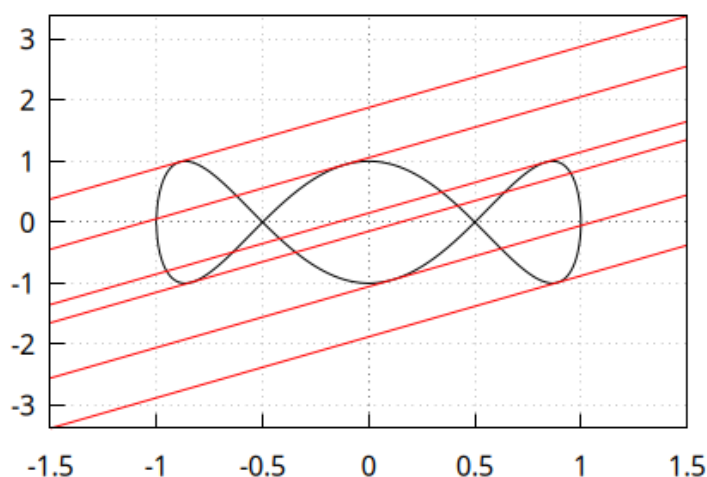
(x4) 3.7269306138158127

(x5) 4.599855154770772

(x6) 5.810381172567485

```
(% i12) wxdraw2d(
        grid=true,
        xaxis=true,
        yaxis=true,
        nticks=500,
        title= Courbe de Lissajoue et les tangentes de pente 1 ,
        color=black,
        parametric(x(t),y(t),t,0,2*%pi),
        color=red,
        explicit(pente(x1)*(x-x(x1))+y(x1),x,-1.5,1.5),
        explicit(pente(x2)*(x-x(x2))+y(x2),x,-1.5,1.5),
        explicit(pente(x3)*(x-x(x3))+y(x3),x,-1.5,1.5),
        explicit(pente(x4)*(x-x(x4))+y(x4),x,-1.5,1.5),
        explicit(pente(x5)*(x-x(x5))+y(x5),x,-1.5,1.5),
        explicit(pente(x6)*(x-x(x6))+y(x6),x,-1.5,1.5)
    );
```

Courbe de Lissajoue et les tangentes de pente 1



(%t12)

(%o12)

5 Exercice 5

(% i13) `define(integrande(t),diff(x(t),t)^ 2+diff(y(t),t)^ 2);`

(%o13) `integrande(t) := 9cos(3t)^2 + sin(t)^2`

(% i14) `longueur :integrate(sqrt(integrande(t)),t,0,2*%pi);`

(longueur) $\int_0^{2\pi} \sqrt{9\cos(3t)^2 + \sin(t)^2} dt$

(% i15) `longueur2 :quad_qag(sqrt(integrande(t)),t,0,2*%pi,1);`

(longueur2) `[13.065417512242037, 5.96670554161113610^-9, 825, 0]`

La longueur de l'arc est donc d'environ 13,06

6 Exercice 6

(% i16) `kill(all)$`

(% i2) `x(t) :=t-0.8*sin(t)$y(t) :=1-0.8*cos(t)$`

(% i3) `define(pente(a),subst(a,t,diff(y(t),t)/diff(x(t),t)));`

(%o3) `pente(a) :=`

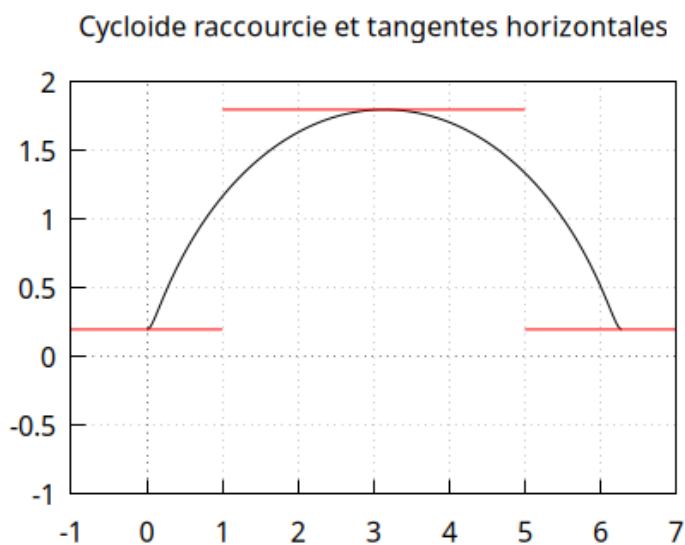
$$\frac{0.8 \sin(a)}{1 - 0.8 \cos(a)}$$

Le dénominateur ne s'annule pas, donc la tangente est horizontale quand $\sin(a)=0$, c'est à dire en $0, \pi$ et 2π .

(% i4) `solve(denom(pente(a)=0),a);`

(%o4) `[]`

```
(% i5) wxdraw2d(
  grid=true,
  xaxis=true,
  yaxis=true,
  xrange=[-1,7],yrange=[-1,2],
  nticks=500,
  title= Cycloide raccourcie et tangentes horizontales ,
  color=black,
  parametric(x(t),y(t),t,0,2*%pi),
  color=red,
  explicit(pente(0)*(x-x(0))+y(0),x,-1,1),
  explicit(pente(%pi)*(x-x(%pi))+y(%pi),x,1,5),
  explicit(pente(2*%pi)*(x-x(2*%pi))+y(2*%pi),x,5,7)
);
```



```
(%t5)
```

```
(%o5)
```

7 Exercice 7

```
(% i6) define(integrande(t),diff(x(t),t)^ 2+diff(y(t),t)^ 2);
(%o6) integrale(t) := 0.6400000000000001sin (t)2 + (1 - 0.8 cos (t))2
```

```
(% i7) ratprint :false$
```

```
(% i8) longueur :integrate(sqrt(integrande(t)),t,0,2*%pi);
(longueur)  $\int_0^{2\pi} \sqrt{0.6400000000000001\sin(t)^2 + (1 - 0.8\cos(t))^2} dt$ 
```

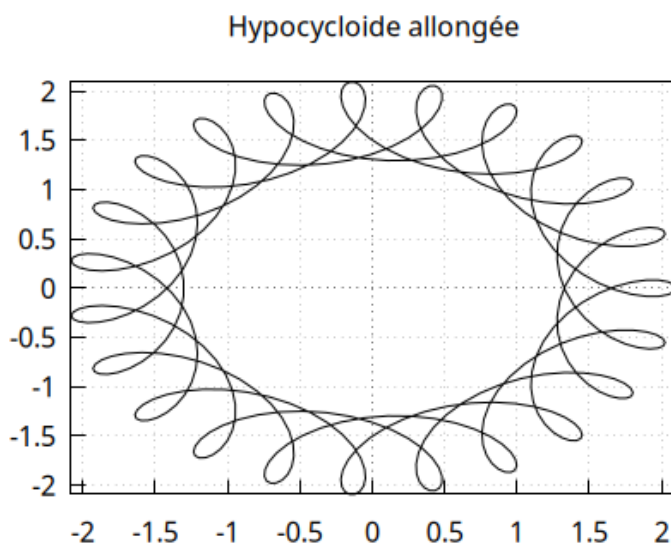
```
(% i9) longueur2 :quad_qag(sqrt(integrande(t)),t,0,2*%pi,1);
(longueur2) [7.337563545522039 , 8.85360438688216710-11 , 225 , 0]
```

8 Exercice 8

```
(% i10) kill(all)$
```

```
(% i2) x(t) := 1.7*cos(t)+0.4*cos(20*t/3)$y(t) := 1.7*sin(t)-0.4*sin(20*t/3)$
```

```
(% i3) wxdraw2d(  
  grid=true,  
  xaxis=true,  
  yaxis=true,  
  nticks=500,  
  title= Hypocycloide allongée ,  
  color=black,  
  parametric(x(t),y(t),t,0,6*%pi)  
);
```



```
(%t3)
```

```
(%o3)
```

```
(% i4) define(integrande(t),diff(x(t),t)^ 2+diff(y(t),t)^ 2)$
```

```
(% i5) ratprint :false$
```

```
(% i6) longueur2 :quad_qag(sqrt(integrande(t)),t,0,6*%pi,1);  
(longueur2) [55.51807212475215 , 4.679606450286978710-7 , 3135 , 0]
```

9 Exercice 9

```
(% i7) kill(all)$
```

```
(% i1) r(t) := 1-sin(t)$
```

On définit la pente d'une tangente quelconque sur la cardoïde :

```
(% i2) define(pente(a),subst(a,t,diff(r(t)*sin(t),t)/diff(r(t)*cos(t),t)));
```

```
(%o2) pente(a) := 
$$\frac{\cos(a)(1 - \sin(a)) - \cos(a)\sin(a)}{-((1 - \sin(a))\sin(a)) - \cos(a)^2}$$

```

```
(% i3) pente2(a) := trigsimp(pente(a));
```

```
(%o3) pente2(a) := trigsimp(pente(a))
```

```
(% i4) pente2(a);
```

```
(%o4) 
$$-\left(\frac{2\cos(a)\sin(a) - \cos(a)}{2\sin(a)^2 - \sin(a) - 1}\right)$$

```

Après simplification, on cherche les valeurs de a qui annulent le numérateur (tangente horizontale) et celles qui annulent le dénominateur (tangente verticale) :

```
(% i5) numerateur : num(ratsimp(pente2(a)));
```

```
(numerateur)  $\cos(a) - 2\cos(a)\sin(a)$ 
```

```
(% i6) factor(numerateur);
```

```
(%o6)  $-(\cos(a)(2\sin(a) - 1))$ 
```

```
(% i7) solve(numerateur=0,a);
```

solve : using arc - trig function to get a solution. Some solutions will be lost.

```
(%o7)  $[a = \frac{\pi}{6}, a = \frac{\pi}{2}]$ 
```

On perd des solutions sur $[0, 2\pi]$. $\cos(a)$ s'annule en $\pi/2$ et donc aussi en $3\pi/2$. $\sin(a)$ vaut $1/2$ en $\pi/6$ et $5\pi/6$

```
(% i11) a1 : %pi/6 $ a2 : %pi/2 $ a3 : 3 * %pi/2 $ a4 : 5 * %pi/6 $
```

Regardons le dénominateur

```
(% i12) denominateur : denom(ratsimp(pente2(a)));
```

```
(denominateur)  $2\sin(a)^2 - \sin(a) - 1$ 
```

```
(% i13) solve(denominateur=0,a);
```

solve : using arc - trig function to get a solution. Some solutions will be lost.

```
(%o13)  $[a = \frac{\pi}{2}, a = -(\frac{\pi}{6})]$ 
```

On en déduit que $2\pi - \pi/6 = 11\pi/6$ est la solution telle que $\sin(a) = -1/2$, ainsi que $7\pi/6$

```
(% i16) a5 : 7 * %pi/6 $ a6 : %pi/2 $ a7 : 11 * %pi/6 $
```

On remarque que $\pi/2$ annule à la fois le numérateur et le dénominateur, donc la tangente n'est pas définie car on a une forme indéterminée. En conclusion, les valeurs de a sont

```
(% i21) a1 ; a3 ; a4 ; a5 ; a7 ;
```

```
(%o17)  $\frac{\pi}{6}$ 
```

```
(%o18)  $\frac{3\pi}{2}$ 
```

```
(%o19)  $\frac{5\pi}{6}$ 
```

```
(%o20)  $\frac{7\pi}{6}$ 
```

(%o21) $\frac{11\pi}{6}$

(% i23) $x(t) := r(t) \cdot \cos(t)$ $y(t) := r(t) \cdot \sin(t)$

(% i24) $\text{tangente}(a,x) := \text{pente2}(a) \cdot (x - x(a)) + y(a)$

(% i25) $\text{tangente}(a1,x);$

(%o25) $\frac{1}{4}$

(% i26) $\text{tangente}(a3,x);$

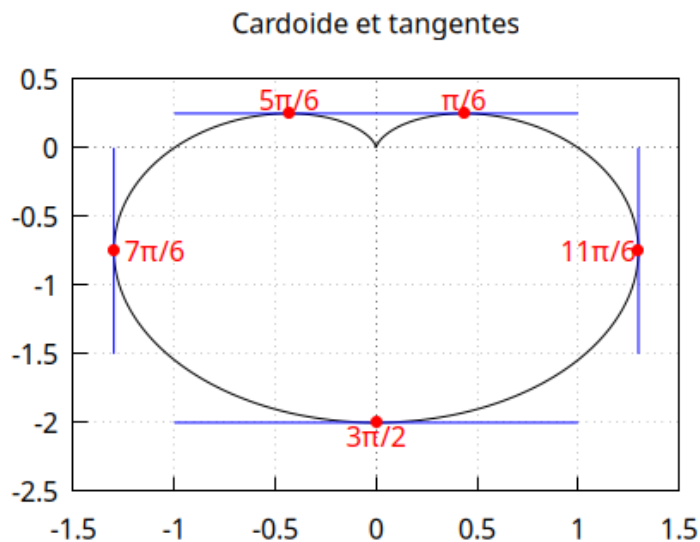
(%o26) -2

(% i27) $\text{tangente}(a4,x);$

(%o27) $\frac{1}{4}$

On trace la courbe et les tangentes demandées :

(% i28) $\text{wxdraw2d}(\text{grid}=\text{true}, \text{xaxis}=\text{true}, \text{yaxis}=\text{true}, \text{xrange}=[-1.5,1.5], \text{yrange}=[-2.5,0.5], \text{nticks}=500, \text{title}=\text{Cardoide et tangentes}, \text{color}=\text{black}, \text{polar}(r(t),t,0,2*\pi), \text{color}=\text{blue}, \text{explicit}(\text{tangente}(a1,x),x,-1,1), \text{explicit}(\text{tangente}(a3,x),x,-1,1), \text{parametric}(x(a5),t,t,-1.5,0), \text{parametric}(x(a7),t,t,-1.5,0), \text{color}=\text{red}, \text{point_type}=7, \text{point_size}=1, \text{points}([x(a1),y(a1)], [x(a3),y(a3)], [x(a4),y(a4)], [x(a5),y(a5)], [x(a7),y(a7)]]), \text{label}([\pi/6, x(a1), y(a1)+0.1]), \text{label}([3\pi/2, x(a3), y(a3)-0.1]), \text{label}([5\pi/6, x(a4), y(a4)+0.1]), \text{label}([7\pi/6, x(a5)+0.2, y(a5)]), \text{label}([11\pi/6, x(a7)-0.2, y(a7)]))$$



(%t28)

10 Exercice 10

(% i29) `define(f(t),sqrt(r(t)^ 2+diff(r(t),t)^ 2));`

(%o29) $f(t) := \sqrt{(1 - \sin(t))^2 + \cos(t)^2}$

(% i30) `quad_qag(f(t),t,0,2*%pi,1);`

(%o30) $[8.0, 8.85957973650874910^{-14}, 75, 0]$

L'arc de la cardoide mesure environ 8.

(% i31) `aire :1/2*integrate(r(t)^ 2,t,0,2*%pi);`

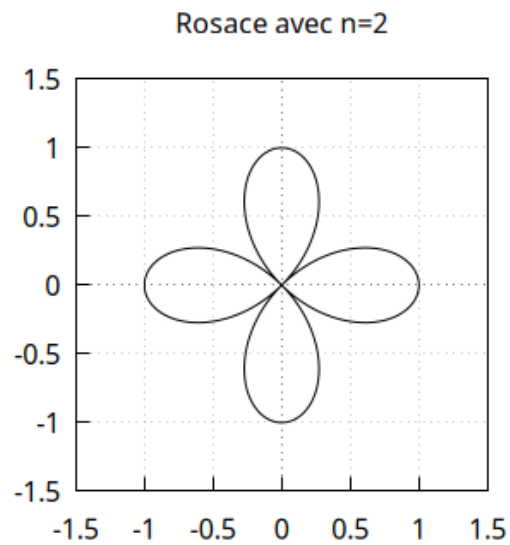
(aire) $\frac{3\pi}{2}$

11 Exercice 11

(% i32) `kill(all)$`

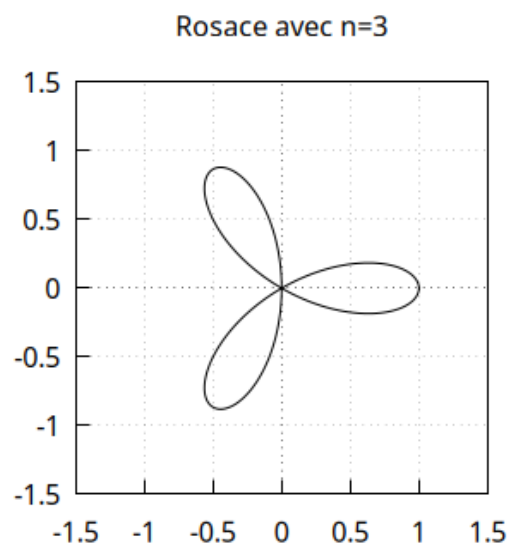
(% i1) `r(n,t) :=cos(n*t)$`

(% i2) `wxdraw2d(
grid=true,
xaxis=true,
yaxis=true,
proportional_axes =xy,
xrange=[-1.5,1.5],yrange=[-1.5,1.5],
nticks=500,
title= Rosace avec n=2 ,
color=black,
polar(r(2,t),t,0,2*%pi)
)$`



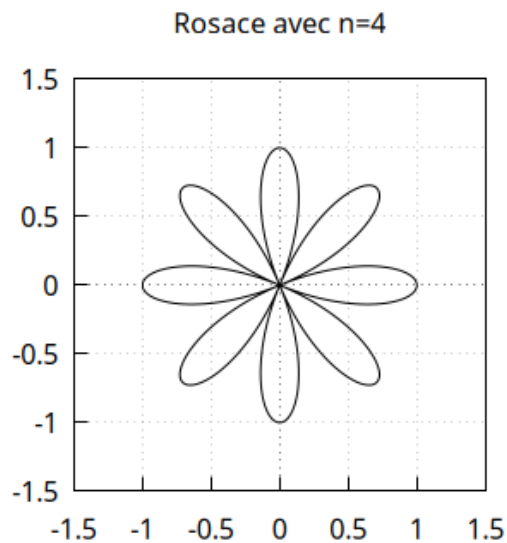
(%t2)

```
(% i3) wxdraw2d(
grid=true,
xaxis=true,
yaxis=true,
proportional_axes =xy,
xrange=[-1.5,1.5],yrange=[-1.5,1.5],
nticks=500,
title= Rosace avec n=3 ,
color=black,
polar(r(3,t),t,0,2*%pi)
)$
```



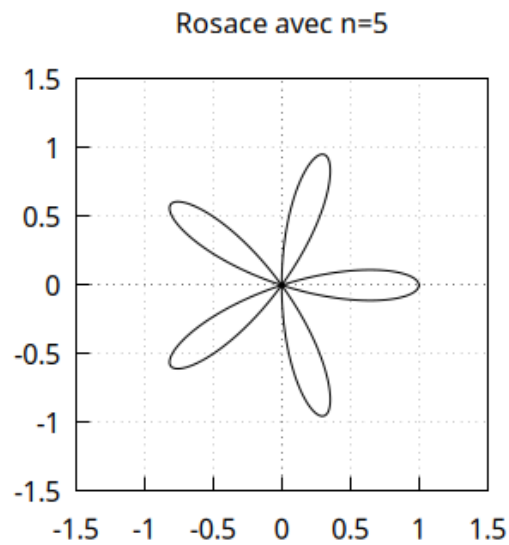
(%t3)

```
(% i4) wxdraw2d(
      grid=true,
      xaxis=true,
      yaxis=true,
      proportional_axes =xy,
      xrange=[-1.5,1.5],yrange=[-1.5,1.5],
      nticks=500,
      title= Rosace avec n=4 ,
      color=black,
      polar(r(4,t),t,0,2*%pi)
    )$
```



(%t4)

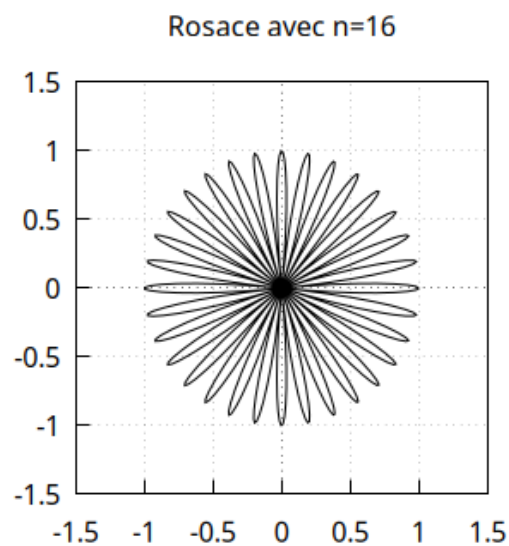
```
(% i5) wxdraw2d(
      grid=true,
      xaxis=true,
      yaxis=true,
      proportional_axes =xy,
      xrange=[-1.5,1.5],yrange=[-1.5,1.5],
      nticks=500,
      title= Rosace avec n=5 ,
      color=black,
      polar(r(5,t),t,0,2*%pi)
    )$
```



(%t5)

On peut émettre l'hypothèse que si n est pair la courbe a $2n$ pétales, et si n est impair la courbe a n pétales. Vérifions donc si pour $n=16$ on a bien 32 pétales.

```
(% i6) wxdraw2d(
      grid=true,
      xaxis=true,
      yaxis=true,
      proportional_axes =xy,
      xrange=[-1.5,1.5],yrange=[-1.5,1.5],
      nticks=500,
      title= Rosace avec n=16 ,
      color=black,
      polar(r(16,t),t,0,2*%pi)
    )$
```



(%t6)

12 Exercice 12

On veut définir un pétale avec $r(16,t)=\cos(16t)$. r doit varier de 0 à 1 puis reprendre la valeur 0. Donc $-\pi/32$ est un angle pour le début du pétale, puis 0 donne la valeur 1 et enfin $\pi/32$ redonne la valeur 0. On devra donc intégrer entre ces 2 valeurs.

```
(% i7) aire_petale : 1/2*integrate(r(16,t)^2,t,-%pi/32,%pi/32);
```

```
(aire_petale)  $\frac{\pi}{64}$ 
```

```
(% i8) float(%);
```

```
(%o8) 0.04908738521234052
```

```
(% i11) x(t) :=float(r(16,t)*cos(t))$
```

```
y(t) :=float(r(16,t)*sin(t))$
```

```
RADIUS(t) :=(y(t)/x(t))*(x-x(t))+y(t)$
```

```
(% i12) RADIII : makelist(
```

```
[[0,0], [x(-%pi/32 + k*(%pi/16)/300), y(-%pi/32 + k*(%pi/16)/300)]],
```

```
k, 1, 299)$
```

```
(% i13) wxdraw2d(
```

```
grid=true, xaxis=true, yaxis=true,
```

```
dimensions=[600,600], nticks=600,
```

```
title= Un pétale (n=16) et son aire ,
```

```
color=grey, line_width=1,
```

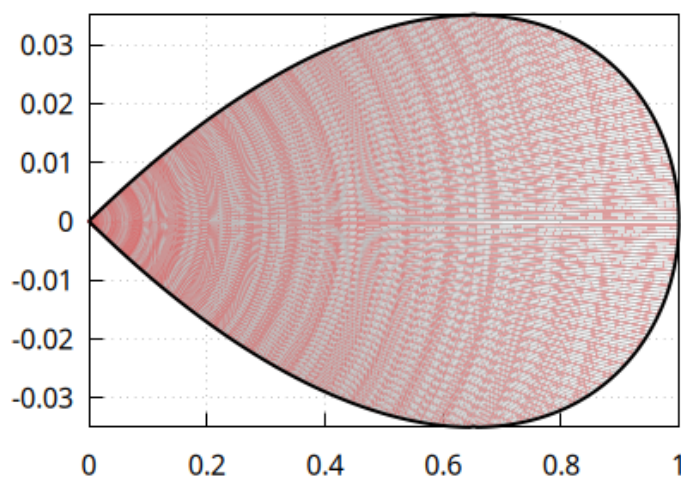
```
makelist(polygon(seg), seg, RADIII),
```

```
color=black, line_width=2,
```

```
polar(r(16,t), t, -%pi/32, %pi/32)
```

```
);
```

Un pétale (n=16) et son aire



```
(%t13)
```

```
(%o13)
```

13 Exercice 13

```
(% i14) kill(all)$
```

```
(% i2) x(t):=v0*cos(theta)*t$y(t):=v0*sin(theta)*t-1/2*g*t^2$
```

```
(% i3) define(x2(t),subst([v0=100,theta=40*%pi/180],x(t)));
```

```
(%o3)  $x_2(t) := 100 \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)t$ 
```

```
(% i4) define(y2(t),subst([v0=100,theta=40*%pi/180,g=9.8],y(t)));
```

```
(%o4)  $y_2(t) := 100 \sin\left(\frac{2\pi}{9}\right)t - 4.9t^2$ 
```

```
(% i5) solutions:solve(y2(t)=0,t);
```

```
(solutions)  $\left[ t = \frac{1000 \sin\left(\frac{2\pi}{9}\right)}{49}, t = 0 \right]$ 
```

```
(% i6) alpha:rhs(solutions[1]);
```

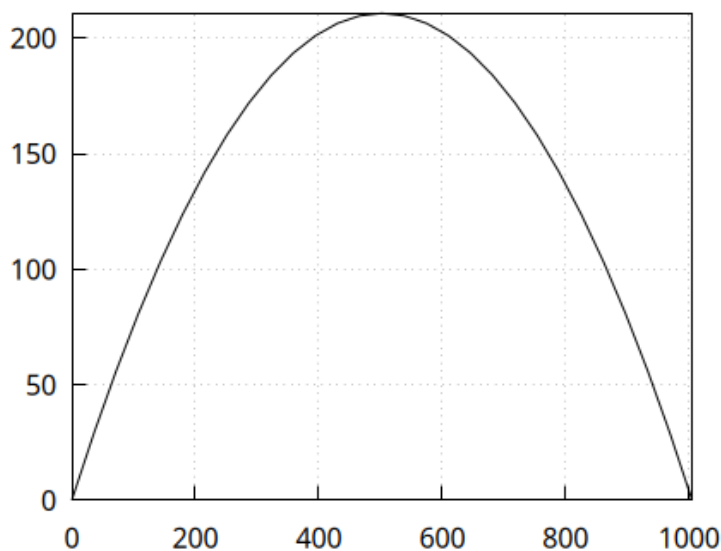
```
(alpha)  $\frac{1000 \sin\left(\frac{2\pi}{9}\right)}{49}$ 
```

```
(% i7) float(alpha);
```

```
(%o7) 13.11811448339876
```

alpha correspond donc au paramètre pour lequel y2 s'annule et donc correspond à l'atterrissage du projectile.

```
(% i8) wxdraw2d(  
  grid=true, xaxis=true, yaxis=true,  
  color=black,  
  parametric(x2(t),y2(t),t,0,alpha)  
)$
```



```
(%t8)
```

14 Exercice 14

```
(% i9) kill(all)$
```

```
(% i2) x(t):=v0*cos(theta)*t$y(t):=v0*sin(theta)*t-1/2*g*t^2$
```

```
(% i3) define(x2(k,t),subst([v0=100,theta=k*%pi/180],x(t)));
```

```
(%o3)  $x_2(k, t) := 100 \cos\left(\frac{\pi k}{180}\right) t$ 
```

```
(% i4) define(y2(k,t),subst([v0=100,theta=k*%pi/180,g=9.8],y(t)));
```

```
(%o4)  $y_2(k, t) := 100 \sin\left(\frac{\pi k}{180}\right) t - 4.9 t^2$ 
```

```
(% i5) solutions :solve(y2(k,t)=0,t);
```

```
(solutions)  $\left[ t = \frac{1000 \sin\left(\frac{\pi k}{180}\right)}{49}, t = 0 \right]$ 
```

```
(% i6) solutions2 :float(rhs(solutions[1]));
```

```
(solutions2)  $20.408163265306122 \sin(0.017453292519943295 k)$ 
```

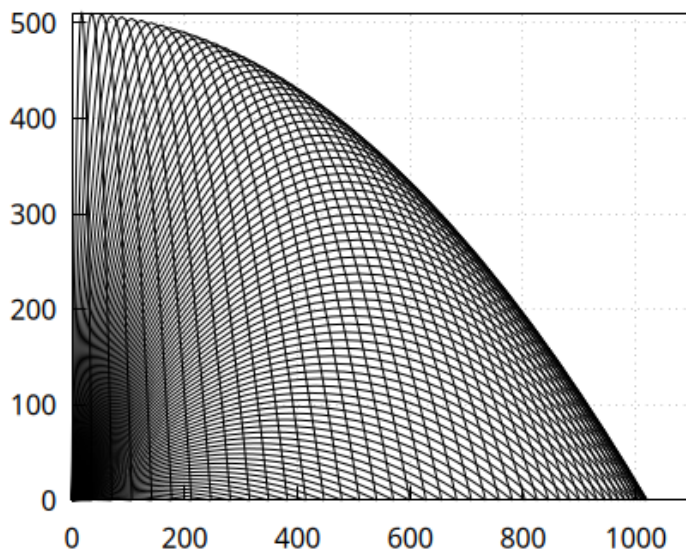
```
(% i7) define(fintrajectoire(k),solutions2);
```

```
(%o7)  $fintrajectoire(k) := 20.408163265306122 \sin(0.017453292519943295 k)$ 
```

On a défini la valeur du paramètre correspondant à la fin de la trajectoire pour chaque valeur de k, ce qui permettra de définir l'intervalle de tracé de chaque projectile.

```
(% i8) projectiles :makelist(parametric(x2(k,t),y2(k,t),t,0,fintrajectoire(k)),k,1,90)$
```

```
(% i9) wxdraw2d(
  grid=true, xaxis=true, yaxis=true,xrange=[0,1100],
  color=black,
  projectiles
)$
```



```
(%t9)
```

On étudie la valeur de x pour chaque t pour lequel le projectile atterrit (exprimé en fonction de k angle de départ)

```
(% i10) x2(k,t);
```

```
(%o10)  $100 \cos\left(\frac{\pi k}{180}\right) t$ 
```

(% i11) solutions3 :rhs(solutions[1]);

(solutions3) $\frac{1000 \sin\left(\frac{\pi k}{180}\right)}{49}$

(% i12) x2(k,solutions3);

(%o12) $\frac{100000 \cos\left(\frac{\pi k}{180}\right) \sin\left(\frac{\pi k}{180}\right)}{49}$

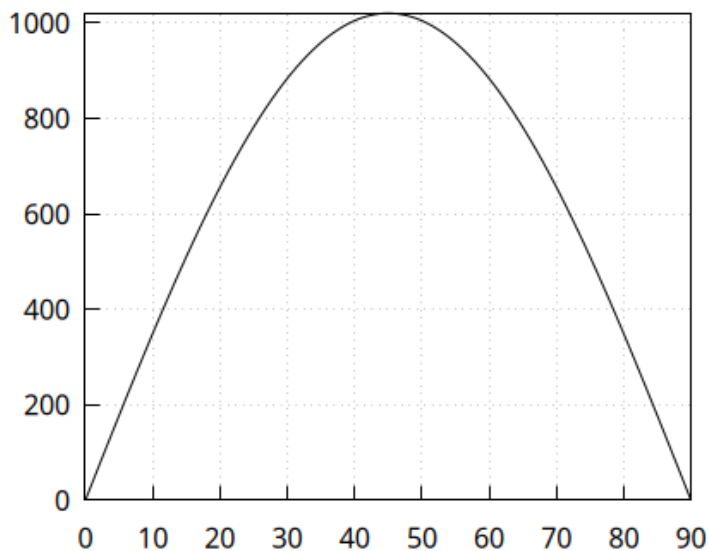
Il reste à trouver la valeur de k qui maximise cette expression (avec k entre 0 et 90)

(% i13) define(portee(k),x2(k,solutions3));

(%o13) $portee(k) := \frac{100000 \cos\left(\frac{\pi k}{180}\right) \sin\left(\frac{\pi k}{180}\right)}{49}$

Etude graphique du maximum : il semble que la valeur maximale soit 45 degrés.

(% i14) wxdraw2d(
grid=true, xaxis=true, yaxis=true,
color=black,
explicit(portee(k),k,0,90)
)\$



(%t14)

Etude de la suite des valeurs

(% i15) makelist(print(k= ,k, et portée = ,float(portee(k))),k,40,50)\$

k= 40 et portée = 1004.9058704206203

k= 41 et portée = 1010.4776211648677

k= 42 et portée = 1014.8182605798709

k= 43 et portée = 1017.9225002651268

k= 44 et portée = 1019.7865581827508

k= 45 et portée = 1020.4081632653061

k= 46 et portée = 1019.7865581827508

k= 47 et portée = 1017.9225002651267

k= 48 et portée = 1014.8182605798706

k= 49 et portée = 1010.4776211648677

k= 50 et portée = 1004.9058704206205

On vérifie que la portée maximale est atteinte pour k=45 degrés et vaut 1020,41 mètres.

(% i16) diff(portee(k),k);

$$(\%o16) \quad \frac{5000\pi \cos\left(\frac{\pi k}{180}\right)^2}{441} - \frac{5000\pi \sin\left(\frac{\pi k}{180}\right)^2}{441}$$

(% i17) factor(%);

$$(\%o17) \quad - \left(\frac{5000\pi \left(\sin\left(\frac{\pi k}{180}\right) - \cos\left(\frac{\pi k}{180}\right) \right) \left(\sin\left(\frac{\pi k}{180}\right) + \cos\left(\frac{\pi k}{180}\right) \right)}{441} \right)$$

(% i18) solve(diff(portee(k),k)=0,k);

$$(\%o18) \quad \left[\sin\left(\frac{\pi k}{180}\right) = -\cos\left(\frac{\pi k}{180}\right), \sin\left(\frac{\pi k}{180}\right) = \cos\left(\frac{\pi k}{180}\right) \right]$$

L'étude de la fonction portee(k) montre que la dérivée s'annule pour k=45 (soit l'angle de $\pi/4$) pour lequel le cosinus est égal au sinus.

15 Exercice 15

(% i19) kill(all)\$

(% i1) edo : 'diff(x,t,2)=-9/(2/10)*x;

$$(\%o) \quad \frac{d^2}{dt^2}x = -(45x)$$

(% i2) solution :ode2(edo,x,t);

$$(\%o) \quad x = \%k1 \sin\left(3\sqrt{5}t\right) + \%k2 \cos\left(3\sqrt{5}t\right)$$

(% i3) solpart :ic2(solution,t=0,x=0.15,'diff(x,t)=2);

$$(\%o) \quad x = \frac{2 \sin\left(3\sqrt{5}t\right)}{3\sqrt{5}} + \frac{3 \cos\left(3\sqrt{5}t\right)}{20}$$

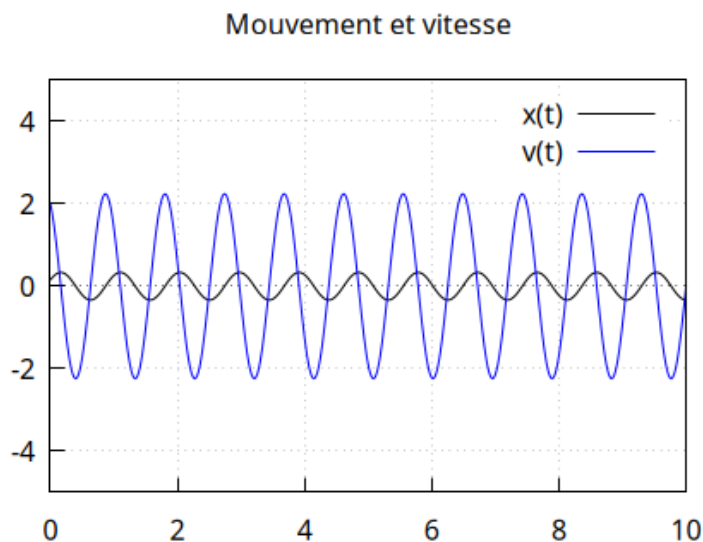
(% i4) define(x(t),rhs(solpart));

$$(\%o4) \quad x(t) := \frac{2 \sin\left(3\sqrt{5}t\right)}{3\sqrt{5}} + \frac{3 \cos\left(3\sqrt{5}t\right)}{20}$$

(% i5) define(v(t),diff(x(t),t));

$$(\%o5) \quad v(t) := 2 \cos\left(3\sqrt{5}t\right) - \frac{9 \sin\left(3\sqrt{5}t\right)}{4\sqrt{5}}$$

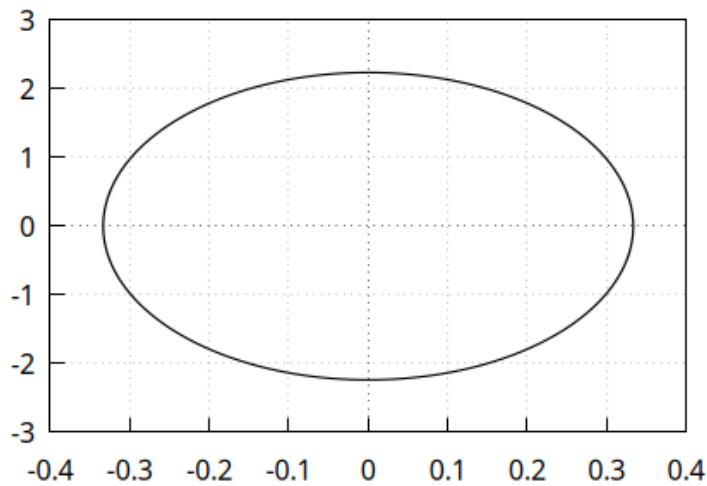
```
(% i6) wxdraw2d(
title= Mouvement et vitesse ,
grid=true,
xaxis=true,
yaxis=true,
xrange=[0,10],
yrange=[-5,5],
color=black,
line_width=1,
key= x(t) ,
explicit(x(t),t,0,10),
color=blue,
line_width=1,
key= v(t) ,
explicit(v(t),t,0,10)
)$
```



(%t6)

```
(% i7) wxdraw2d(
title= Espace des phases ,
grid=true,
xaxis=true,
yaxis=true,
nticks=600,
xrange=[-0.4,0.4],
yrange=[-3,3],
color=black,
line_width=1,
parametric(x(t),v(t),t,0,10)
)$
```

Espace des phases



(%t7)

16 Exercice 16

(% i8) kill(all)\$

(% i1) edo : 'diff(x,t,2)=-9/(2/10)*x-3/10*'diff(x,t);

(edo) $\frac{d^2}{dt^2}x = - \left(\frac{3 \left(\frac{d}{dt}x \right)}{10} \right) - 45x$

(% i2) solution :ode2(edo,x,t);

(solution) $x = \%e^{-\left(\frac{3t}{20}\right)} \left(\%k1 \sin \left(\frac{3\sqrt{1999}t}{20} \right) + \%k2 \cos \left(\frac{3\sqrt{1999}t}{20} \right) \right)$

(% i3) solpart :ic2(solution,t=0,x=0.15,'diff(x,t)=2);

(solpart) $x = \%e^{-\left(\frac{3t}{20}\right)} \left(\frac{809 \sin \left(\frac{3\sqrt{1999}t}{20} \right)}{60\sqrt{1999}} + \frac{3 \cos \left(\frac{3\sqrt{1999}t}{20} \right)}{20} \right)$

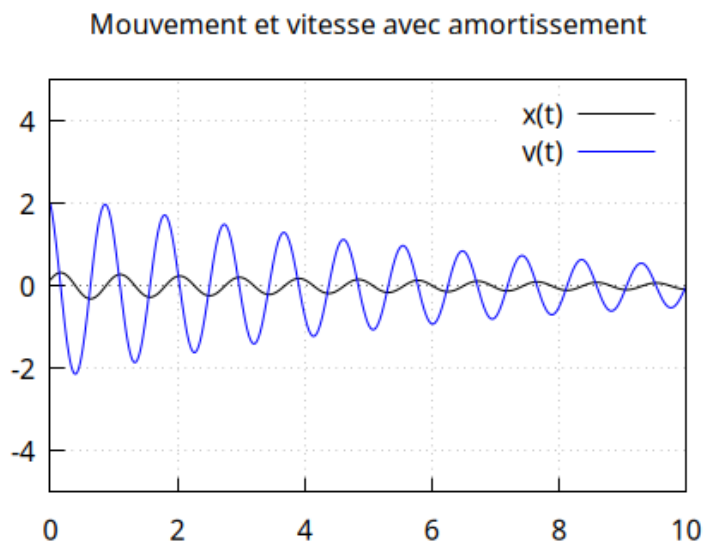
(% i4) define(x(t),rhs(solpart));

(%o4) $x(t) := \%e^{-\left(\frac{3t}{20}\right)} \left(\frac{809 \sin \left(\frac{3\sqrt{1999}t}{20} \right)}{60\sqrt{1999}} + \frac{3 \cos \left(\frac{3\sqrt{1999}t}{20} \right)}{20} \right)$

(% i5) define(v(t),factor(diff(x(t),t)));

(%o5) $v(t) := - \left(\frac{\%e^{-\left(\frac{3t}{20}\right)} \left(47 \sin \left(\frac{3\sqrt{1999}t}{20} \right) - 2\sqrt{1999} \cos \left(\frac{3\sqrt{1999}t}{20} \right) \right)}{\sqrt{1999}} \right)$

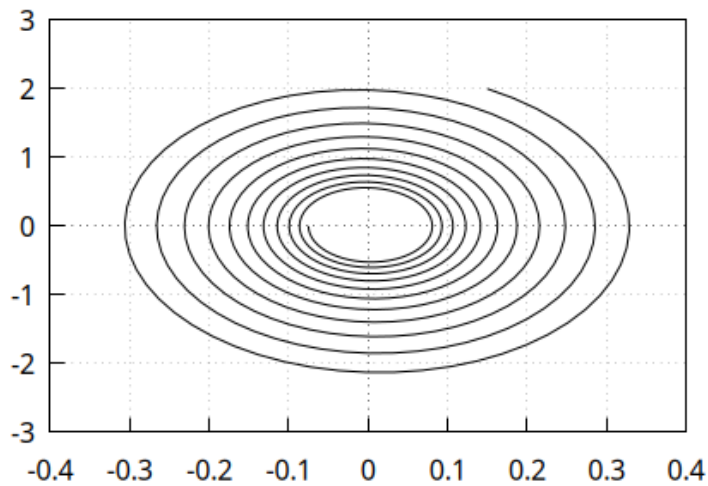
```
(% i6) wxdraw2d(
title= Mouvement et vitesse avec amortissement ,
grid=true,
xaxis=true,
yaxis=true,
xrange=[0,10],
yrange=[-5,5],
color=black,
line_width=1,
key= x(t) ,
explicit(x(t),t,0,10),
color=blue,
line_width=1,
key= v(t) ,
explicit(v(t),t,0,10)
)$
```



(%t6)

```
(% i7) wxdraw2d(
title= Espace des phases avec amortissement ,
grid=true,
xaxis=true,
yaxis=true,
nticks=600,
xrange=[-0.4,0.4],
yrange=[-3,3],
color=black,
line_width=1,
parametric(x(t),v(t),t,0,10)
)$
```

Espace des phases avec amortissement



(%t7)

17 Exercice 17

Avertissement : les animations des exercices 17, 18 et 19 n'apparaissent évidemment pas dans ce corrigé. Le code Maxima est indiqué, mais il est nécessaire d'exécuter ce code à partir du fichier source wxMaxima pour visualiser ces animations.

```
(% i8) kill(all)$

(% i3) x(t) :=cos(7*t)$
      y(t) :=sin(3*t)$
      scene :[]$

-> /* enlever le commentaire pour exécuter la commande
    for i :0 thru 1000 do
    (scene : append(scene,[gr2d(
    grid=true,
    xaxis=true,
    yaxis=true,
    title= Une courbe de Lissajous. ,
    color=black,
    nticks=600,
    dimensions=[600,600],
    parametric(cos(7*t),sin(3*t),t,0,2*%pi),
    color=red,
    point_type=7,
    points([[x(i*2*%pi/1000),y(i*2*%pi/1000)]])
    ]))$
    fin du commentaire */

->
```

```

-> /* génération du gif animé
draw(
delay=5,
file_name= lissajous_anim ,
terminal='animated_gif,
scene
)$
fin du commentaire */

```

2002framesinanimationsequence

On génère une animation dans wxMaxima à l'aide de la commande with_slider_draw :

```

(% i4) with_slider_draw(
i, makelist(k, k, 0, 1000,10),
grid=true,
xaxis=true,
yaxis=true,
title= Une courbe de Lissajous. ,
nticks=250,
dimensions=[600,600],
color=black,
parametric(cos(7*t),sin(3*t),t,0,2*%pi),
color=red,
point_type=filled_circle,
points([[x(i*2*%pi/1000),y(i*2*%pi/1000)]])
)$
(%t4) [animated graphics - not shown in TeX export]
(%t5)

```

18 Exercice 18

```

(% i6) kill(all)$

(% i1) with_slider_draw(
phi, makelist(2*%pi*k/100, k, 0, 100),
grid=true,
xaxis=true,
yaxis=true,
title= Courbe de Lissajous :  $x(t)=\cos(t+\phi)$ ,  $y(t)=\sin(2t)$  ,
nticks=150,
key=sconcat( angle= ,float(phi)),
dimensions=[400,400],
xrange=[-1.5,1.5],
yrange=[-1.5,1.5],
color=blue,
parametric(cos(t+phi), sin(2*t), t, 0, 2*%pi)
)$
(%t1) [animated graphics - not shown in TeX export]
(%t2)

```

19 Exercice 19

(% i3) kill(all)\$

(% i1) with_slider_draw(
i, makelist(k, k, 0, 1000, 10),
grid=true,
xaxis=true,
yaxis=true,
title= Trace progressif de la rosace $r(\theta)=3\cos(4\theta)$,
nticks=300,
dimensions=[400,400],
xrange=[-3.5,3.5],
yrange=[-3.5,3.5],
color=blue,
polar(3*cos(4*theta), theta, 0, i*2*%pi/1000)
)\$

(%t1) [animated graphics - not shown in TeX export]

(%t2)