

1 Exercice 1

Partie A

Une joueuse de basket constate qu'elle réussit 60 % de ses lancers francs au cours d'une séance d'entraînement.

En se basant sur ces statistiques, on modélise la situation comme une succession d'épreuves aléatoires indépendantes.

1. Cette joueuse effectue cinq lancers consécutifs.
 - a. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de lancers réussis. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
 - b. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de $P(X \geq 4)$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
2. On suppose maintenant que cette sportive doit effectuer n lancers, où n est un entier naturel non nul. Soit Y la variable aléatoire donnant le nombre de lancers réussis. On admet que la variable aléatoire Y suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,6$.
 - a. Montrer que $P(Y \geq 1) = 1 - 0,4^n$.
 - b. En déduire le nombre n de lancers à partir duquel la probabilité d'en réussir au moins un dépasse 0,9999.
 - c. Recopier et compléter le script de la fonction Python suivante afin qu'elle permette de retrouver le résultat de la question 2.b.

```
def basket():
    p = 0.6
    n = 1
    while .....:
        n = n + 1
        p = .....
    return .....
```

1.1 Etude de X

X suit une loi binomiale de paramètres $p=0.6$ et $n=5$. On a $p(X \geq 4) = p(X=4) + p(X=5)$

```
(% i6)  n :5$ p :0.6$
        pX4 :binomial(n,4)*p^4*(1-p);
        pX5 :binomial(n,5)*p^5;
        resultat :pX4+pX5;
        round(resultat*100)/100.0;
(pX4)  0.2592 (pX5)  0.07775999999999998 (resultat)  0.33696 (%o6)  0.34
```

La joueuse réussit au moins 4 lancers sur 5 dans 34% des cas.

1.2 Etude de Y

a) $p(Y \geq 1) = 1 - p(Y < 1) = 1 - p(Y=0)$ en utilisant l'événement contraire, donc

```
(% i7)  kill(n)$
```

```
(% i10) prob(n) := 1 - binomial(n,0)*p^0*(1-p)^n;
      prob(n);
      subst(1, 1.0, prob(n));
      /* la dernière étape permet que la multiplication par 1.0 donne le résultat attendu */
```

```
(%o8) prob(n) := 1 -  $\binom{n}{0} p^0 (1-p)^n$  (%o9) 1 - 1.00.4^n (%o10) 1 - 0.4^n
```

```
(% i11) makelist(print( prob( ,n, )= ,prob(n)),n,1,12)$
```

```
prob( 1 )= 0.6
prob( 2 )= 0.84
prob( 3 )= 0.9359999999999999
prob( 4 )= 0.9744
prob( 5 )= 0.98976
prob( 6 )= 0.995904
prob( 7 )= 0.9983616
prob( 8 )= 0.99934464
prob( 9 )= 0.999737856
prob( 10 )= 0.9998951424
prob( 11 )= 0.99995805696
prob( 12 )= 0.999983222784
```

A partir de 11 lancers, la probabilité dépasse 0.9999. On peut aussi résoudre l'équation

```
(% i12) solve(prob(n)=0.9999,n);
```

```
rat: replaced 9.999999999998899e-5 by 908687295/9086872950001 = 9.9999999999989e-5
rat: replaced -1.0 by -1/1 = -1.0
rat: replaced 0.4 by 2/5 = 0.4
```

```
(%o12)  $[5^{n+1} = \frac{90868729500012^n}{181737459}]$ 
```

Maxima ne résout pas directement, on va donc réaliser pas à pas les opérations sur l'équation :

```
(% i13) eq : prob(n)=0.9999;
(eq) 1 - 1.00.4^n = 0.9999
```

```
(% i14) eq1 : eq-1;
(eq1)  $-(1.00.4^n) = -9.99999999999889910^{-5}$ 
```

```
(% i15) eq2 :-eq1;
(eq2)  $1.00.4^n = 9.99999999999889910^{-5}$ 
```

```
(% i16) eq3 : log(eq2);
(eq3)  $\log(1.00.4^n) = -9.210340371976294$ 
```

```
(% i17) eq3, logexpand=super;
(%o17)  $-(0.916290731874155n) = -9.210340371976294$ 
```

```
(% i18) float(solve(% ,n));
```

rat: replaced 9.210340371976294 by 28533570/3097993 = 9.210340371976308
 rat: replaced -0.916290731874155 by -18164268/19823695 = -0.9162907318741537

(%o18) $[n = 10.051766378928393]$

Comme n est entier, c'est bien à partir de 11 que la condition est vérifiée.

```
(% i20) recherche() := block([p, n],
      p : 0.6, n : 1,
      while p < 0.9999 do
        (n : n+1, p : 1 - 0.4^n),
        n
      )$
      recherche();
```

(%o20) 11

Ce programme est une adaptation en Maxima du programme Python de l'exercice.

Partie B

Pour un autre joueur, on remarque que :

- lorsqu'il a réussi un lancer franc, il réussit le suivant avec une probabilité de 0,7,
- lorsqu'il a raté un lancer franc, il réussit le suivant avec une probabilité de 0,4.

On considère que la probabilité de réussir son premier lancer est de 0,5.

On note G_1 l'évènement : « le joueur réussit son premier lancer franc ».

On a donc $P(G_1) = 0,5$.

On note G_2 l'évènement : « le joueur réussit son deuxième lancer franc ».

1. Calculer $P(G_2)$. On pourra utiliser un arbre de probabilité.

Soit n un entier naturel non nul.

On note G_n l'évènement « le joueur réussit le n -ième lancer franc » et p_n la probabilité de G_n . On définit ainsi une suite (p_n) de réels.

On admet que pour tout $n \geq 1$, $p_{n+1} = 0,3p_n + 0,4$.

2. a. En utilisant un raisonnement par récurrence, démontrer que
pour tout $n \geq 1$, $p_n \leq p_{n+1}$.
 b. Quel argument permet d'affirmer que la suite (p_n) est majorée ?
 c. En déduire que la suite (p_n) est convergente.

3. On admet que la limite de (p_n) quand n tend vers $+\infty$ est $\frac{4}{7}$.

Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

B) 1. La formule des probabilités totales donne

$$p(G_2) = p(G_1 \cap G_2) + p(\bar{G}_1 \cap G_2)$$

```
(% i21) p2 : 0.5*0.7+0.5*0.4;
(p2) 0.55
```

```
(% i22) kill(p)$
```

On retrouve l'expression de la suite (p_n) avec le même raisonnement que précédemment au rang n :

```
(% i23) p(n)*7/10+(1-p(n))*4/10;
(%o23)  $\frac{7p(n)}{10} + \frac{2(1-p(n))}{5}$ 
```

$$p(G_{n+1}) = p(G_n \cap G_{n+1}) + p(\bar{G}_n \cap G_{n+1})$$

(% i24) float(expand(%));

(%o24) $0.3p(n) + 0.4$

B) 2. Récurrence classique dont on donne les éléments essentiels : on a $p_1 \leq p_2$. On suppose que $p_n \leq p_{n+1}$ ce qui entraîne que $0.3p_n + 0.4 \leq 0.3p_{n+1} + 0.4$, soit $p_{n+1} \leq p_{n+2}$. CQFD. La suite (p_n) est croissante et majorée par 1, elle est donc convergente vers $l \leq 1$. Maxima est capable d'exprimer p_n en fonction de n :

(% i25) load(solve_rec)\$

(% i26) expression :solve_rec(p[n+1] = 3/10*p[n] + 2/5, p[n], p[1] = 0.5);

rat: replaced -0.5 by -1/2 = -0.5

(expression) $p_n = \frac{2^2}{7} - \frac{3^{n-1}10^{1-n}}{14}$

(% i27) limit(rhs(expression),n,inf);

(%o27) $\frac{4}{7}$

Ce qui confirme que la limite de la suite est bien égale à $4/7$. Après un grand nombre de lancers, la probabilité de réussite pour le jour est proche de $4/7$.

2 Exercice 2

(% i28) kill(all)\$

Soit f la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = (3x - 1)e^{-x} + 2$.

On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
Interpréter graphiquement ce résultat.
3. On note f' la fonction dérivée de f .
 - a. Vérifier que, pour tout nombre réel x , $f'(x) = (4 - 3x)e^{-x}$.
 - b. Étudier le signe de la dérivée et en déduire le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
4. a. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.
On notera α cette solution.
 - b. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
 - c. En déduire le tableau de signes de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
 - d. Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = (-3x - 2)e^{-x} + 2x$.
On admet que la fonction F est une primitive de f .
Calculer, en unités d'aire, l'aire du domaine limité par la courbe C , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2$.
5. On admet que la droite d'équation $y = 4x + 1$ est la tangente à la courbe C au point d'abscisse 0.
Vérifier que, pour tout réel x , $(3x - 1)e^{-x} + 2 \leq 4x + 1$.

```
(% i1) f(x):=(3*x-1)*exp(-x)+2;
(%o1) f(x):=(3x-1)exp(-x)+2
```

1. Limite en -oo

```
(% i2) limit(f(x),x,minf);
(%o2) - infinity
```

2. Limite en +oo

```
(% i3) limit(f(x),x,inf);
(%o3) 2
```

Asymptote horizontale d'équation y=2.3. Calcul de la dérivée

```
(% i4) define(fp(x),diff(f(x),x));
(%o4) fp(x):=3%e-x - %e-x(3x-1)
```

```
(% i5) ratsimp(fp(x));
(%o5) -(%e-x(3x-4))
```

Le signe de f'(x) est donc celui de -(3x-4)=4-3x

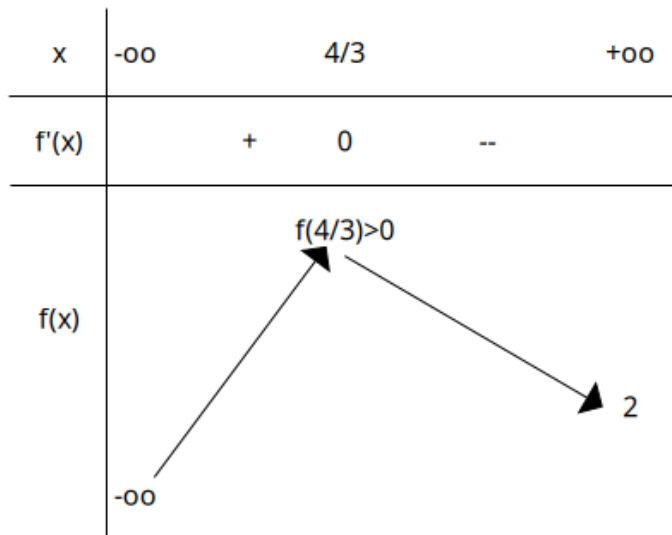
```
(% i6) solve(fp(x)=0,x);
(%o6) [x = 4/3]
```

f'(x) est donc positif pour x<4/3 et négatif pour x>4/3. La fonction f est donc croissante puis décroissante.

```
(% i8) f(4/3);float(f(4/3));
(%o7) 3%e-(4/3) + 2 (%o8) 2.79079141434718
```

On réalise le tableau de variations avec les commandes graphiques de Maxima à titre de démonstration.

```
(% i9) wxdraw2d(
  xrange=[-1,6],
  yrange=[-1,5],
  xtics = none, ytics = none,
  axis_bottom = false, axis_left = false,
  axis_top = false, axis_right = false,
  color=black,
  line_width=1,
  key= ,
  parametric(t,4,t,-1,6),
  parametric(t,3,t,-1,6),
  parametric(0,t,t,-1,5),
  label([ x , -0.5,4.5]), label([ -oo ,0.3,4.5]),label([ +oo ,5.5,4.5]),
  label([ 4/3 ,2.5,4.5]),label([ f'(x) , -0.5,3.5]),label([ f(x) , -0.5,1.5]),
  label([ 0 ,2.5,3.5]),label([ + ,1.5,3.5]),label([ - ,4,3.5]),
  label([ -oo ,0.3,-0.5]), label([ f(4/3)>0 ,2.5,2.5]), label([ 2 ,5.5,0.5]),
  head_length = 0.25,
  vector([0.5,-0.3],[1.8,2.6]),vector([2.5,2.2],[2.7,-1.7])
)$
```



(%t9)

4. On applique le théorème de bijection sur $] -\infty; 4/3[$ qui montre l'existence d'une unique solution α de $f(x)=0$ sur cet intervalle. Pour $x > 4/3$, $f(x) > 0$ donc pas de solution.

```
(% i10)   $\alpha$  :find_root(f(x)=0,x,-10,4/3);
(%o10)  - 0.208089542140738
```

```
(% i11)  round( $\alpha$ *100)/100.0;
(%o11)  - 0.21
```

On en déduit que $f(x) < 0$ sur $] -\infty; \alpha[$ et $f(x) > 0$ sur $] \alpha; +\infty[$.

```
(% i12)  F(x) :=(-3*x-2)*exp(-x)+2*x;
(%o12)   $F(x) := (-3x - 2) \exp(-x) + 2x$ 
```

Vérifions que F est bien une primitive de f :

```
(% i13)  expand(diff(F(x),x));
(%o13)   $3e^{-x}x - e^{-x} + 2$ 
```

```
(% i14)  ratsimp(diff(F(x),x)-f(x));
(%o14)  0
```

f étant positive sur $[0;2]$

```
(% i15)  Aire :integrate(f(x),x,0,2);
(Aire)   $e^{-2} (6e^2 - 8)$ 
```

```
(% i16)  expand(Aire);
(%o16)   $6 - 8e^{-2}$ 
```

En utilisant F comme indiqué par l'énoncé

```
(% i17)  Airebis :F(2)-F(0);
(Airebis)   $6 - 8e^{-2}$ 
```

5. Calculons l'équation de la tangente en $x=0$:

```
(% i18)  tangente(x) :=fp(0)*(x-0)+f(0);
(%o18)   $tangente(x) := fp(0)(x - 0) + f(0)$ 
```

(% i19) tangente(x);

(%o19) $4x + 1$

Il faut montrer que $f(x) < 4x + 1$, étudions donc la fonction $g(x) = f(x) - (4x + 1)$ en étudiant les variations de g' :

(% i20) $g(x) := f(x) - (4x + 1);$

(%o20) $g(x) := f(x) - (4x + 1)$

(% i21) define(gprime(x),diff(g(x),x,1));

(%o21) $gprime(x) := -\left(\%e^{-x} (3x - 1)\right) + 3\%e^{-x} - 4$

(% i22) ratsimp(gprime(x));

(%o22) $-\left(\%e^{-x} (3x + 4\%e^x - 4)\right)$

(% i23) define(gseconde(x),diff(g(x),x,2));

(%o23) $gseconde(x) := \%e^{-x} (3x - 1) - 6\%e^{-x}$

(% i24) ratsimp(gseconde(x));

(%o24) $\%e^{-x} (3x - 7)$

(% i25) gprime(7/3);

(%o25) $-\left(3\%e^{-\left(\frac{7}{3}\right)}\right) - 4$

(% i26) float(%);

(%o26) -4.290915903593215

(% i28) limit(gprime(x),x,minf);limit(gprime(x),x,inf);

(%o27) $\lim_{x \rightarrow -\infty} gprime(x) = -4$

(% i30) limit(g(x),x,minf);limit(g(x),x,inf);

(%o29) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$

(% i31) gprime(0);

(%o31) 0

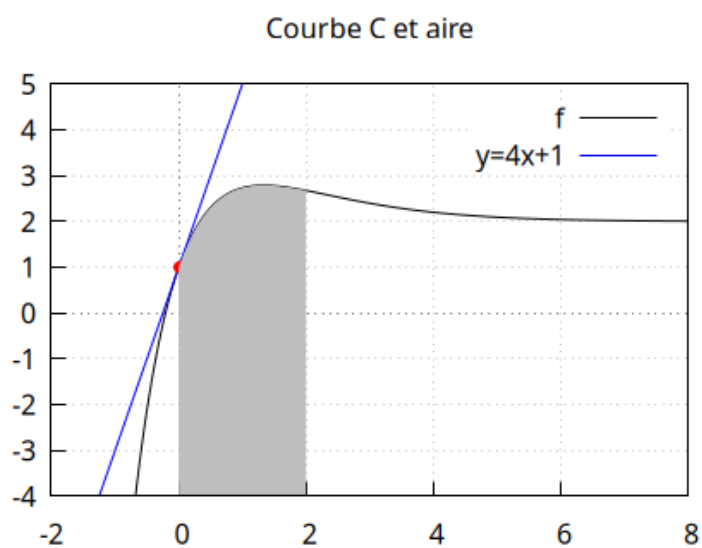
Bilan de l'étude pour g' :

x	$-\infty$	$\frac{7}{3}$	$+\infty$
$g''(x)$	$-$	0	$+$
$g'(x)$	$+\infty \searrow \simeq -4.29 \nearrow -4$		

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$ \begin{array}{c} \nearrow 0 \searrow \\ -\infty \qquad \qquad -\infty \end{array} $		

$g'(x)$ est donc positive sur $]-\infty;0[$ puis négative à partir de 0 (sachant que $g'(0)=0$). On en déduit l'étude de g :
En conclusion, $g(x) \leq 0$ et donc $f(x) - (4x+1) \leq 0$ donc on a bien sur $\mathbb{R}$ $f(x) \leq 4x+1$. CQFD

```
(% i32) wxdraw2d(
title= Courbe C et aire ,
grid=true,
xaxis=true,
yaxis=true,
xrange=[-2,8],
yrange=[-4,5],
color=black,
line_width=1,
key= f ,
explicit(f(x),x,-5,8),
color=blue,key= y=4x+1 ,
explicit(4*x+1,x,-2,2),
color=red, point_type=7,point_size=1,
key= , points([[0,1]]),
fill_color=grey, filled_func=true, color=green,
explicit(f(x),x,0,2)
)$
```



(%t32)

3 Exercice 3 : QCM vrai/faux

(% i33) kill(all)\$

1. On considère l'équation différentielle (E) $y' - 2y = (x - 3)e^x$, où y est une fonction de la variable x , définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Affirmation 1 :

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x - 2)e^x$ est solution de l'équation différentielle (E).

(% i1) f(x):=(x-2)*exp(x);
(%o1) $f(x) := (x - 2) \exp(x)$

(% i2) diff(f(x),x)-2*f(x);
(%o2) $e^x - e^x(x - 2)$

(% i3) factor(%);
(%o3) $-(e^x(x - 3))$

L'affirmation est donc fausse.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = (2x + 1)\cos(x)$.

On intègre par parties $\int_0^\pi f(x) dx$.

Affirmation 2 :

$$\int_0^\pi f(x) dx = -4\pi$$

On définit les fonctions u et v' pour l'intégration par parties :

(% i4) assume(x>0);
(%o4) $[x > 0]$

(% i10) u(x):=(2*x+1);vprime(x):=cos(x);uprime(x):=diff(u(x),x);uprime(x);v(x):=integrate(vprime(t),t,0,x);v(x);
(%o5) $u(x) := 2x + 1$ (%o6) $vprime(x) := \cos(x)$ (%o7) $uprime(x) := \frac{d}{dx} u(x)$ (%o8) 2 (%o9) $v(x) := \int_0^x vprime(t) dt$
(%o10) $\sin(x)$

Commençons par intégrer directement avec Maxima :

(% i11) integrate(u(x)*vprime(x),x,0,%pi);
(%o11) -4

On intègre par parties :

(% i12) partie1(x):=u(x)*v(x);
(%o12) $partie1(x) := u(x) v(x)$

(% i13) partie1(x);
(%o13) $(2x + 1) \sin(x)$

(% i14) partie2(x):=uprime(x)*v(x);
(%o14) $partie2(x) := uprime(x) v(x)$

```
(% i15)  partie2(x);
(%o15)  2 sin (x)
```

```
(% i16)  resultatipp :partie1(%pi)-partie1(0)-integrate(partie2(x),x,0,%pi);
(resultatipp)  - 4
```

L'affirmation est donc fausse. En utilisant la commande at pour évaluer une expression :

```
(% i6)  kill(all)$
        U : 2*x+1 ;
        Vp : cos(x);
        V : integrate(Vp, x);          /* sin(x) */
        crochet : at(U*V, x=%pi) - at(U*V, x=0);
        reste : integrate(diff(U,x)*V, x, 0, %pi);
        resultatipp : crochet - reste;
(U)  2x + 1 (Vp)  cos (x) (V)  sin (x) (crochet)  0 (reste)  4 (resultatipp)  - 4
```

3. On considère l'inéquation suivante sur $]7; +\infty[$:

$$\ln(2x^2 - 6x - 56) \geq \ln(4x - 8)$$

Affirmation 3 :

L'ensemble des solutions de cette inéquation est l'intervalle $[8; +\infty[$.

```
(% i7)  kill(all)$
```

La fonction $\ln$ étant strictement croissante, l'inéquation équivaut à $2x^2 - 6x - 56 \geq 4x - 8$. On utilise le package solve_rat_ineq pour résoudre cette inéquation :

```
(% i1)  load(solve_rat_ineq)$
```

```
(% i2)  solve_rat_ineq(2*x^2-6*x-56>=4*x-8);
(%o2)  [[x <= - 3], [x >= 8]]
```

Sur $]7; +\infty[$ l'ensemble des solutions est donc bien l'intervalle $[8; +\infty[$. On peut aussi résoudre à la main :

```
(% i3)  ineq1 :log(2*x^2-6*x-56)>=log(4*x-8);
(ineq1)  log (2x2 - 6x - 56) >= log (4x - 8)
```

```
(% i4)  ineq2 :exp(lhs(ineq1))>=exp(rhs(ineq1));
(ineq2)  2x2 - 6x - 56 >= 4x - 8
```

```
(% i5)  ineq3 :lhs(ineq2)-rhs(ineq2)>=rhs(ineq2)-rhs(ineq2);
(ineq3)  2x2 - 10x - 48 >= 0
```

```
(% i6)  solve(lhs(ineq3)=0,x);
(%o6)  [x = - 3, x = 8]
```

Le trinôme est donc positif à l'extérieur des racines d'après le cours, ce qui permet de confirmer le résultat précédent, et donc d'affirmer que l'affirmation est vraie.

4. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{3u_n}{5u_n + 3}$$

On admet que $u_n \neq 0$ pour tout entier naturel n .

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = \frac{2}{u_n}$.

Affirmation 4 :

La suite (v_n) est une suite arithmétique.

```
(% i5) kill(all)$
u[n] := if n = 0 then 1 else 3*u[n-1]/(5*u[n-1]+3)$
v[n] := 2/u[n]$
makelist(u[k], k, 0, 5);
makelist(v[k], k, 0, 5);
makelist(v[k+1]-v[k], k, 0, 5);
(%o3) [1, 3/8, 3/13, 1/6, 3/23, 3/28] (%o4) [2, 16/3, 26/3, 12, 46/3, 56/3] (%o5) [10/3, 10/3, 10/3, 10/3, 10/3, 10/3]
```

D'après ces résultats, il semble que la suite (v_n) soit arithmétique de raison $10/3$. Démonstration :

```
(% i7) un1 : 3*un/(5*un+3)$
ratsimp(2/un1 - 2/un);
(%o7) 10/3
```

On ne peut utiliser $u[n]$ ou $v[n]$ car Maxima ne peut pas effectuer ces calculs sur des suites définies par récurrence. On conclut cependant que l'affirmation est vraie.

5. On lance 3 600 fois un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6.

Affirmation 5 :

La probabilité que le nombre d'apparitions du 6 soit strictement compris entre 450 et 750 est mino-
rée par 0,97.

L'expérience est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres $n=3600$, de probabilité de succès $p=1/6$ et de probabilité d'échec de $1-1/6=5/6$. La probabilité d'obtenir k fois le nombre 6 sur 3600 lancers est donnée par :

```
(% i8) p6(k) := binomial(3600,k)*(1/6)^k*(5/6)^(3600-k);
(%o8) p6(k) := (3600 choose k) (1/6)^k (5/6)^(3600-k)
```

On additionne ensuite les probabilités pour chaque apparition entre 451 et 749 :

```
(% i9) P : sum(p6(k), k, 451, 749)$
```

```
(% i10) float(P);
(%o10) 0.999999999952308
```

La probabilité est bien supérieure à 0,97, donc l'affirmation est vraie. On peut aussi, dans l'esprit du programme, effectuer la démonstration à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

```
(% i11) Esperance : 1/6*3600;
(Esperance) 600
```

```
(% i12) Variance : 1/6*5/6*3600;
(Variance) 500
```

On remarque que l'intervalle $]450;750[$ est donc centré sur 600, avec un demi-rayon de 150, donc ce qui démontre le résultat obtenu précédemment.

$$p(|X - 600| < 150) \geq 1 - \frac{500}{150^2} \simeq 0.9777777777777777$$

4 Exercice 4

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'unité 1 cm.

Partie A

On considère les points de l'espace $R(1; 0; 6)$, $S(1; 3; 2)$, $T(3,5; 7; 5)$ et $A(-2,5; 8; 4,5)$.

1. Démontrer que les points R, S et T ne sont pas alignés.
2. a. Démontrer que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} -10 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (RST).
 - b. En déduire une équation cartésienne du plan (RST).
3. a. Vérifier que la point A n'appartient pas au plan (RST).
 - b. On note d_1 la droite passant par le point A et orthogonale au plan (RST).
Déterminer une représentation paramétrique de la droite d_1 .
 - c. Soit le point H projeté orthogonal de A sur (RST).
Vérifier que ses coordonnées sont $(2,5; 6; 3)$.
4. a. Démontrer que le triangle RST est rectangle en S.
 - b. Vérifier que le volume du tétraèdre ARST est égal à $\frac{625}{24} \text{ cm}^3$.
On rappelle que le volume du tétraèdre est donné par la formule :

$$V = \frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$$

Partie B

Soit $M(x; y; z)$ un point de la droite d_2 de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -4,5 + s \\ y = 4 - 4s \\ z = 5,5 - 2s \end{cases}, s \in \mathbb{R}$$

1. Démontrer que $AM^2 = 21s^2 + 24s + 21$.
2. Déterminer les coordonnées du point M de la droite d_2 pour lesquelles la distance AM est minimale.

Nous allons résoudre cet exercice avec un package dédié à l'enseignement de la géométrie analytique en 3D avec Maxima, `geomana3d.mac`. Pour télécharger ce package et accéder à la documentation complète : <https://maxima-french-doc.fr/geomana3d-un-package-pour-la-geometrie-analytique-3d-au-lyc>

4.1 Partie A

(% i1) `kill(all)$load(geomana3d);`

La commande `info_package_geom3d()` donne les informations de ce package - Version 2.5 (%o1) `/home/mgosse2/.maxima`

(% i5) `R:[1,0,6]$S:[1,3,2]$T:[3.5,7,5]$A:[-2.5,8,4.5]$`

Regardons si les vecteurs SR et TR sont colinéaires :

(% i7) `R-S;R-T;`
(%o6) `[0, -3, 4]` (%o7) `[-2.5, -7, 1]`

(% i8) `is_colineaire(R-S,R-T)$`

Pour savoir si deux vecteurs sont colinéaires, on cherche si leurs coordonnées sont proportionnelles. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

En méthode alternative, on cherche si les trois points R, S et T forment un plan :

(% i9) `is_plan(R,S,T)$`

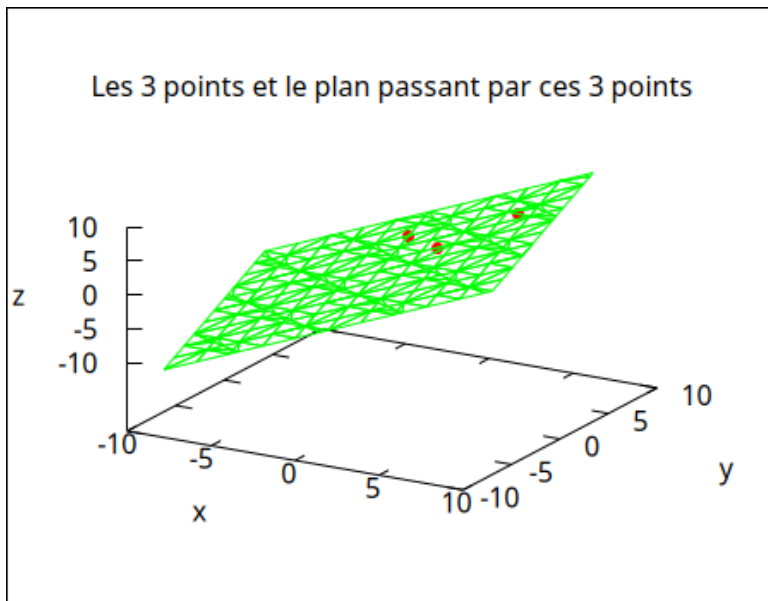
Les 3 points $[1, 0, 6]$, $[1, 3, 2]$ et $[3.5, 7, 5]$ forment bien un plan.

En effet, les trois points ne sont pas alignés. Pour le démontrer, on peut définir

deux vecteurs directeurs à partir des 3 points et vérifier qu'ils ne sont pas colinéaires.

Vecteur normal au plan : $[25, -10.0, -7.5]$

Equation du plan : $-(7.5z) - 10.0y + 25x + 20.0 = 0$



```
(% i10) n :[-10,4,3]$
```

On peut vérifier si le vecteur n est orthogonal aux deux vecteurs directeurs du plan R-S et R-T :

```
(% i11) produit_scalaire(n,R-S)$
```

Si $u(x,y,z)$ et $v(x',y',z')$ alors le produit scalaire est égal à $xx'+yy'+zz'$

Le produit scalaire des deux vecteurs est égal à 0

```
(% i12) produit_scalaire(n, R-T)$
```

Si $u(x,y,z)$ et $v(x',y',z')$ alors le produit scalaire est égal à $xx'+yy'+zz'$

Le produit scalaire des deux vecteurs est égal à 0.0

Le vecteur n est donc bien un vecteur normal au plan (RST).

```
(% i13) equation_plan(R,S,T)$
```

Les 3 points $[1, 0, 6]$, $[1, 3, 2]$ et $[3.5, 7, 5]$ forment bien un plan.

Un vecteur normal au plan est : $[25, -10.0, -7.5]$

Une équation du plan est : $-(7.5z) - 10.0y + 25x + 20.0 = 0$

On utilise une deuxième commande du package et on définit une équation du plan :

```
(% i14) eqp :equation_plan2(n,R)$
```

Un plan a pour équation de manière générale $ax+by+cz+d=0$

Les coordonnées du vecteur normal donnent respectivement les coefficients de x, y et z

On trouve d en résolvant l'équation obtenue en remplaçant x, y et z par les coordonnées du point.

Valeur calculée de la constante d : - 8

Une équation du plan défini par ce vecteur normal et ce point est donc : $3z + 4y - 10x - 8 = 0$

On peut bien sur démontrer que les deux équations du plan obtenues par ces deux commandes sont équivalentes :

```
(% i15) expand(-5/2*eqp);
```

$$(\%o15) \quad -\left(\frac{15z}{2}\right) - 10y + 25x + 20 = 0$$

(% i16) float(%);

$$(\%o16) \quad -(7.5z) - 10.0y + 25.0x + 20.0 = 0.0$$

Question 3. On commence par vérifier si les coordonnées de A vérifient l'équation du plan (RST) :

(% i17) is_point_plan_eq(A,eqp)\$

On teste si les coordonnées du point vérifient l'équation du plan. $-10x - 2.5 + 4x + 8 + 3x + 4.5 + -8 = 62.5$

Le point n'appartient pas au plan.

La droite d1 passe par A et a pour vecteur directeur n, d'où son équation paramétrique :

(% i18) eqd1 :equation_droite(A,n,t)\$

Equations paramétriques de la droite : $[x = -(10t) - 2.5, y = 4t + 8, z = 3t + 4.5, t]$

On peut chercher directement le point H avec la commande proj_ortho(M,eq) :

(% i19) H :proj_ortho(A,eqp)\$

rat: replaced 2.5 by 5/2 = 2.5

rat: replaced -4.5 by -9/2 = -4.5

On trouve un système d'équations paramétriques de la droite passant par le point dirigée par un vecteur normal au plan puis on cherche le point d'intersection de cette droite avec le plan.

Equation de la droite perpendiculaire au plan passant par le point : $[x = -(10t) - 2.5, y = 4t + 8, z = 3t + 4.5, t]$

Coordonnées du point d'intersection : $\left[\frac{5}{2}, 6, 3\right]$

Autre méthode : connaissant les coordonnées de H, on vérifie que ce point appartient au plan (RST) et à la droite (d1) :

(% i20) is_point_plan_eq(H,eqp)\$

On teste si les coordonnées du point vérifient l'équation du plan. $-10x \frac{5}{2} + 4x + 6 + 3x + 3 + -8 = 0$
donc le point appartient au plan.

(% i21) is_point_droite(H,eqd1)\$

On cherche s'il existe une valeur du paramètre pour lequel les équations paramétriques donnent les coordonnées du point, en résolvant le système linéaire correspondant.

rat: replaced -5.0 by -5/1 = -5.0

rat: replaced 1.5 by 3/2 = 1.5

solve: dependent equations eliminated: (3 2)

Le système admet une solution pour $t = -\left(\frac{1}{2}\right)$

donc le point $\left[\frac{5}{2}, 6, 3\right]$ appartient à la droite.

Question 4. On calcule le produit scalaire des vecteurs SR et ST pour vérifier que le triangle RST est rectangle en S :

(% i22) produit_scalaire(R-S,T-S)\$

Si $u(x,y,z)$ et $v(x',y',z')$ alors le produit scalaire est égal à $xx'+yy'+zz'$

Le produit scalaire des deux vecteurs est égal à 0.0

Base du tétraèdre : le triangle RST, rectangle en S et hauteur du tétraèdre le segment AH, d'où :

(% i23) Volume : $1/3*(1/2*norme2(R,S)*norme2(T,S))*norme2(A,H);$

(Volume) 26.041666666666664

(% i24) float(625/24);

(%o24) 26.041666666666668

On trouve bien la valeur attendue, moyennant les erreurs d'arrondi réalisées par Maxima qui sont dues aux nombres décimaux dans les coordonnées de certains des points. Passons en fractions décimales afin de trouver cette fois un résultat exact :

(% i29) R;S;T;A;H;

(%o25) $[1, 0, 6]$ (%o26) $[1, 3, 2]$ (%o27) $[3.5, 7, 5]$ (%o28) $[-2.5, 8, 4.5]$ (%o29) $[\frac{5}{2}, 6, 3]$

(% i31) T:[7/2,7,5];A:[-5/2,8,9/2];

(T) $\left[\frac{7}{2}, 7, 5\right]$ (A) $\left[-\left(\frac{5}{2}\right), 8, \frac{9}{2}\right]$

(% i32) Volume2 : $1/3*(1/2*norme2(R,S)*norme2(T,S))*norme2(A,H);$

(Volume2) $\frac{625}{24}$

On trouve bien le résultat attendu pour le volume.

4.2 Partie B

Définissons le point M

(% i33) M : $[-9/2+s, 4-4*s, 11/2-2*s];$

(M) $\left[s - \frac{9}{2}, 4 - 4s, \frac{11}{2} - 2s\right]$

(% i34) float(%);

(%o34) $[s - 4.5, 4.0 - 4.0s, 5.5 - 2.0s]$

(% i35) norme2(A,M)^2;

(%o35) $(s - 2)^2 + (1 - 2s)^2 + (- (4s) - 4)^2$

(% i36) expand(%);

(%o36) $21s^2 + 24s + 21$

On trouve bien l'expression attendue pour AM^2 . On étudie cette expression dont on reconnait une fonction trinôme :

(% i37) define(distance(s),expand(norme2(A,M)^2));

(%o37) $distance(s) := 21s^2 + 24s + 21$

(% i38) solve(diff(distance(s),s)=0,s);

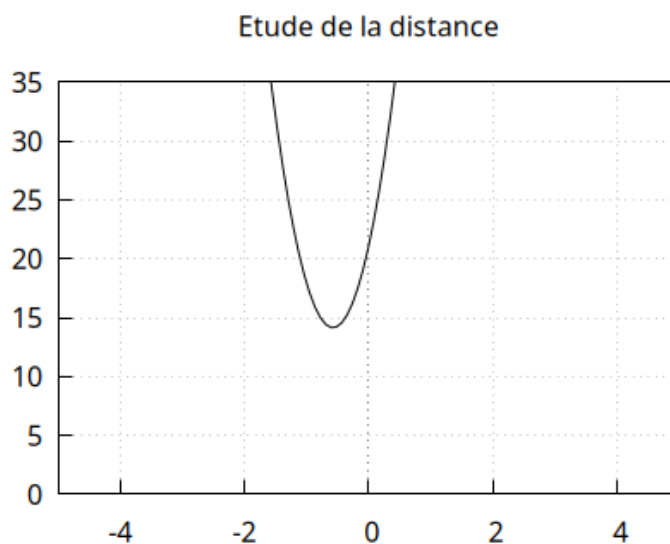
(%o38) $\left[s = -\left(\frac{4}{7}\right)\right]$

Le trinôme admet un minimum en ce point. On en calcule la valeur :

```
(% i39) smin :rhs(%[1]);
```

```
(smin)  $-\left(\frac{4}{7}\right)$ 
```

```
(% i40) wxdraw2d(  
  title= Etude de la distance ,  
  grid=true,  
  xaxis=true,  
  yaxis=true,  
  xrange=[-5,5],  
  yrange=[-0,35],  
  color=black,  
  line_width=1,  
  key= ,  
  explicit(distance(x),x,-5,5)  
)  
;
```



(%t40)

(%o40)

```
(% i41) subst(smin,s,M);
```

```
(%o41)  $\left[-\left(\frac{71}{14}\right), \frac{44}{7}, \frac{93}{14}\right]$ 
```

ce qui donne les coordonnées du point cherché.