

1 Introduction

Le package ‘odes.mac’ d’Aleksas Domarkas date de 2013. Il est très utile et contient de nombreuses fonctions destinées à l’étude ou à la résolution d’équations différentielles. Toutefois, depuis son écriture, Maxima a beaucoup évolué et certaines commandes ne sont plus compatibles. En outre, des bogues sont apparus dans quelques fonctions. Avec l’aide de Claude AI, une nouvelle version de ce package, nommée ‘odes2’, est proposée. Elle corrige certains de ces bogues et est compatible avec les versions récentes de Maxima.

Ce document a été généré à partir de la documentation du package odes original et en utilisant odes2. Le fichier wxMaxima correspondant est téléchargeable sur le site <https://maxima-french-doc.fr/> à la rubrique Exemples (manual-odes2.wmxm).

2 Installation

1. Télécharger le fichier odes2.mac (le fichier est comprimé au format zip, il faut donc le décompresser avant de pouvoir l’utiliser).
2. Copier ce fichier dans le dossier de Maxima.
3. Le package se charge avec la commande `load(odes2)`

Alternativement, on peut le charger avec le menu de wxMaxima : Fichier -> Charger un paquetage.

3 Commandes du package

<code>odecv</code>	<code>intfactor1</code>
<code>dchange</code>	<code>odeL</code>
<code>odeC</code>	<code>odeL_ic</code>
<code>solvat</code>	<code>fs</code>
<code>odel_ic</code>	<code>partsol</code>
<code>ode2_ic</code>	<code>odeM</code>
<code>P_iter</code>	<code>odeM_ic</code>
<code>odeltaylor</code>	<code>matrix_exp</code>
<code>ode2taylor</code>	<code>odelinsys</code>
<code>odelexact</code>	<code>wronskian</code>

4 Corrections et améliorations apportées dans odes2

Cette version révisée du package odes .mac d’Aleksas Domarkas (version originale 2.01, novembre 2013) conserve les méthodes mathématiques du package initial. Les modifications concernent principalement la correction de bugs, la compatibilité avec les versions récentes de Maxima, la fiabilité des calculs et la qualité des messages d’erreur.

Cette version a été élaborée avec l’aide de Claude IA par Michel Gosse (michel.gosse@free.fr)

4.1 Vérification des arguments et messages d’erreur

Des contrôles ont été ajoutés aux fonctions publiques afin de détecter plus tôt les erreurs d’utilisation : équation absente ou mal formée, nombre incorrect de conditions initiales, ordre inadapté de l’équation, matrice non carrée, dimensions incompatibles, etc.

Lorsqu’un calcul ne peut pas être effectué, le package produit désormais un message explicite indiquant la fonction concernée et la nature du problème. Cela évite, dans de nombreux cas, l’affichage d’erreurs internes peu compréhensibles de Maxima.

En particulier, les fonctions `odeL`, `odeL_ic`, `fs`, `icn`, `odeM` et `odeM_ic` interceptent les erreurs internes et les remplacent par des messages plus utiles pour l'utilisateur.

4.2 Équations linéaires à coefficients constants

Les fonctions `fs`, `odeL` et `odeL_ic` vérifient désormais que l'équation fournie est bien linéaire à coefficients constants. Cette vérification évite de tenter la résolution d'équations non linéaires ou à coefficients variables avec des méthodes qui ne leur sont pas applicables.

La vérification initiale contenait plusieurs défauts. En particulier, `polynomialp` ne peut pas recevoir directement des dérivées comme variables polynomiales, car des expressions telles que `'diff(y, x, k)` ne sont pas des symboles atomiques. Les dérivées sont donc maintenant remplacées, une par une et dans l'ordre décroissant, par des symboles auxiliaires avant le test de linéarité.

Un autre bug concernait le comptage des racines du polynôme caractéristique dans `fs`. Le programme comparait l'ordre de l'équation au nombre de racines *distinctes*, au lieu de tenir compte de leurs multiplicités. Le calcul additionne maintenant correctement les multiplicités des racines.

4.3 Fonction `partsol`

La recherche d'une solution particulière par la méthode des coefficients indéterminés et de la transformée de Laplace a été rendue plus sûre.

Dans la version originale, `partsolL_UC` cherchait à extraire la solution particulière en supprimant, après développement, les termes supposés appartenir à la solution homogène. Cette méthode reposait sur un filtrage heuristique qui pouvait échouer lorsque `desolve` renvoyait une expression non développée ou partiellement factorisée, notamment en présence de racines multiples ou complexes.

La nouvelle version impose plutôt les conditions initiales nulles

$$y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0$$

à l'équation auxiliaire résolue par `desolve`. La solution obtenue est alors une solution particulière bien déterminée. Elle peut contenir des termes qui appartiennent formellement à la solution homogène, mais ces termes sont absorbés dans les constantes arbitraires de la solution générale et ne modifient donc pas la validité mathématique du résultat.

La fonction `partsol` tente d'abord cette méthode. En cas d'échec, elle utilise automatiquement la variation des constantes (`partsolL_VP`), sans se limiter à quelques cas particuliers du second membre.

4.4 Fonctions de Taylor

Les fonctions `ode1taylor` et `ode2taylor` réutilisaient la même variable locale pour mémoriser successivement la série de Taylor symbolique et la sortie de `solve`. La série initialement calculée était ainsi perdue, et la fonction pouvait renvoyer une liste d'équations au lieu de la série attendue.

Ce défaut a été corrigé en séparant les deux objets : la série de Taylor est stockée dans une variable dédiée, tandis que la solution du système déterminant les coefficients est stockée dans une autre variable.

4.5 Équations exactes : `ode1exact`

La fonction `ode1exact` a été corrigée pour les équations différentielles exactes du premier ordre

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

La version initiale déléguait une étape intermédiaire au solveur général `ode2`. Après intégration de P par rapport à x , il fallait en effet calculer une fonction $g(y)$ telle que

$$g'(y) = Q - \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Cette équation est une simple intégration par rapport à y , mais `ode2` pouvait fournir un coefficient incorrect lorsque la fonction inconnue était passée sous une forme fonctionnelle auxiliaire. La nouvelle version n'utilise plus `ode2` dans ce cas. Elle calcule directement

$$F(x, y) = \int P(x, y) dx, \quad g(y) = \int \left(Q(x, y) - \frac{\partial F}{\partial y} \right) dy,$$

puis renvoie l'intégrale première

$$F(x, y) + g(y) = C.$$

Par exemple, pour

$$2xy dx + (x^2 + 3y^2) dy = 0,$$

la version corrigée donne bien

$$x^2y + y^3 = C.$$

4.6 Gestion de l'état global de Maxima

Certaines fonctions du package original utilisaient temporairement `depends` ou `assume`, mais ne supprimaient pas toujours les hypothèses ou dépendances créées. En cas d'erreur au cours du calcul, celles-ci restaient actives dans la session Maxima et pouvaient altérer des calculs ultérieurs.

Par exemple, une dépendance résiduelle de la forme `depends(y, x)` modifie le résultat de `diff(y, x)` et peut faire échouer ultérieurement des fonctions telles que `ode1exact`. De même, une hypothèse comme $u > 0$ ou $t > t_0$ ne doit pas persister après l'appel d'une fonction.

Les fonctions `odecv`, `odeC` et `odelinsys` utilisent maintenant `unwind_protect`. Ainsi, les instructions de nettoyage `remove(..., dependency)` et `forget(...)` sont exécutées, que le calcul se termine normalement ou qu'une erreur survienne.

4.7 Fonction `solv`

La fonction `solv`, qui résout une équation algébrique et tente de fournir des racines réelles sous une forme trigonométrique lorsque cela est nécessaire, contenait une erreur dans le traitement du *casus irreducibilis*.

Pour un polynôme cubique irréductible possédant trois racines réelles, `solve` peut produire des expressions de Cardano contenant des quantités complexes intermédiaires. L'ancien programme cherchait la présence de `sin` dans la liste complète des racines avant la conversion trigonométrique. Ce test ne pouvait pas détecter correctement le cas à traiter, car les fonctions trigonométriques n'apparaissent précisément qu'après cette conversion.

La version corrigée traite chaque racine séparément. Elle examine la racine brute renvoyée par `solve`, puis applique, si nécessaire, les transformations `polarform`, `rectform`, `trigsimp` et `trigreduce`. Cette correction permet notamment de traiter correctement des équations comme

$$k^3 - 3k^2 + 1 = 0,$$

dont les trois racines sont réelles.

4.8 Détermination des constantes d'intégration

La fonction `icn`, utilisée notamment par `odeL_ic`, détermine les constantes d'intégration à partir des conditions initiales. Elle vérifie maintenant que le système obtenu possède exactement une solution.

Si le système n'a pas de solution, ou s'il admet plusieurs solutions, la fonction affiche un message explicite au lieu de réaliser une substitution incorrecte ou incomplète.

4.9 Suite de tests de non-régression

Une fonction `odes_selftest()` a été ajoutée. Elle exécute une suite de tests portant notamment sur :

- des racines réelles simples et multiples ;
- des paires de racines complexes conjuguées ;

- des racines complexes multiples ;
- un cas de résonance pour une équation non homogène ;
- un problème à conditions initiales d'ordre quatre ;
- les développements limités calculés par `odeltaylor` ;
- les équations exactes traitées par `odelexact` ;
- l'absence de fuite des dépendances créées par `odecv` ;
- le *casus irreducibilis* dans `solv`.

Cette suite facilite la vérification du package après une modification du code ou après une mise à jour de Maxima.

4.10 Limitations connues

Certaines limitations viennent du solveur natif de Maxima et ne sont pas corrigées dans `odes2`.

Pour certaines équations linéaires à coefficients constants dont le polynôme caractéristique possède des racines algébriques compliquées, `odeL_ic` peut encore provoquer une erreur interne de type `PQUOTIENT`. Cette difficulté est liée à l'arithmétique polynomiale de Maxima dans des extensions algébriques complexes.

De plus, la réduction d'une équation autonome du second ordre à une équation du premier ordre dans `ode2_ic` peut rencontrer une erreur connue du solveur natif `ode2`. Il est donc recommandé de vérifier indépendamment les résultats de `ode2_ic` et `ode_ic` dans le cas des équations autonomes.

Documentation de odes2

```
(% i1) /* load the package */
      load(odes2)$
```

5 odecv

Function : `odecv(tr,eq,y,x)` Makes the change of independent variable in ODE.

5.1 $x^3 y''' + x y' - y = x$

```
(% i2) eq : x^3*diff(y,x,3)+x*diff(y,x)-y=x;
```

$$x^3 \left(\frac{d^3}{dx^3} y \right) + x \left(\frac{d}{dx} y \right) - y = x \quad (\text{eq})$$

```
(% i3) odecv(x=exp(t),eq,y,x);
```

$$\frac{d^3}{dt^3} y - 3 \left(\frac{d^2}{dt^2} y \right) + 3 \left(\frac{d}{dt} y \right) - y = e^t \quad (\% \text{ o3})$$

```
(% i4) odeL(%y,t);
```

$$y = \frac{e^t t^3}{6} + e^t C_3 t^2 + e^t C_2 t + e^t C_1 \quad (\% \text{ o4})$$

```
(% i5) sol :subst(t=log(x),%);
```

$$y = \frac{x \log(x)^3}{6} + C_3 x \log(x)^2 + C_2 x \log(x) + C_1 x \quad (\text{sol})$$

5.2 $(1 + x^2) * y'' + x * y' + y = 0$

(% i6) eq : (1+x^2)*diff(y,x,2)+x*diff(y,x)+y=0;

$$(x^2 + 1) \left(\frac{d^2}{dx^2} y \right) + x \left(\frac{d}{dx} y \right) + y = 0 \quad (\text{eq})$$

(% i7) trans(eq):=block(
coeff(lhs(eq),'diff(y,x))/coeff(lhs(eq),'diff(y,x,2)),
t=radcan(integrate(exp(-integrate(%%,x)),x)))\$

(% i9) itr : trans(eq); tr : solve(itr,x)[1];

$$t = \operatorname{asinh}(x) \quad (\text{itr})$$

$$x = \sinh(t) \quad (\text{tr})$$

(% i10) odecv(tr,eq,y,x);

$$\frac{d^2}{dt^2} y + y = 0 \quad (\% \text{ o10})$$

(% i11) ode2(% ,y,t);

$$y = \%k1 \sin(t) + \%k2 \cos(t) \quad (\% \text{ o11})$$

(% i12) sol : subst(itr,%);

$$y = \%k1 \sin(\operatorname{asinh}(x)) + \%k2 \cos(\operatorname{asinh}(x)) \quad (\text{sol})$$

5.3 $y'' - y' / x + 4 * x^2 * y = 0$

(% i13) eq : diff(y,x,2)-1/x*diff(y,x)+4*x^2*y=0;

$$\frac{d^2}{dx^2} y - \frac{\frac{d}{dx} y}{x} + 4x^2 y = 0 \quad (\text{eq})$$

(% i15) itr : t=x^2; tr : x=sqrt(t);

$$t = x^2 \quad (\text{itr})$$

$$x = \sqrt{t} \quad (\text{tr})$$

(% i16) odecv(t=x^2,eq,y,x);

$$4t \left(\frac{d^2}{dt^2} y \right) + 4ty = 0 \quad (\% \text{ o16})$$

(% i17) ode2(% ,y,t);

$$y = \%k1 \sin(t) + \%k2 \cos(t) \quad (\% \text{ o17})$$

(% i18) sol : subst(itr,%);

$$y = \%k1 \sin(x^2) + \%k2 \cos(x^2) \quad (\text{sol})$$

5.4 kamke 3.74. $4x^4 y''' - 4x^3 y'' + 4x^2 y' = 1$

(% i19) eq :4*x^4*diff(y,x,3)-4*x^3*diff(y,x,2)+4*x^2*diff(y,x)=1 ;

$$4x^4 \left(\frac{d^3}{dx^3} y \right) - 4x^3 \left(\frac{d^2}{dx^2} y \right) + 4x^2 \left(\frac{d}{dx} y \right) = 1 \quad (\text{eq})$$

(% i20) odecv(x=exp(t),eq,y,x);

$$4e^t \left(\frac{d^3}{dt^3} y \right) - 16e^t \left(\frac{d^2}{dt^2} y \right) + 16e^t \left(\frac{d}{dt} y \right) = 1 \quad (\% \text{ o20})$$

(% i21) eq1 :%/4/exp(t),expand;

$$\frac{d^3}{dt^3} y - 4 \left(\frac{d^2}{dt^2} y \right) + 4 \left(\frac{d}{dt} y \right) = \frac{e^{-t}}{4} \quad (\text{eq1})$$

(% i22) odeL(eq1,y,t);

$$y = \frac{e^{-t} (6e^{3t}t - 5e^{3t} + 9e^t - 4)}{144} + e^{2t}C3t + e^{2t}C2 + C1 \quad (\% \text{ o22})$$

(% i23) subst(t=log(x),%),expand;

$$y = C3x^2 \log(x) + \frac{x^2 \log(x)}{24} + C2x^2 - \frac{5x^2}{144} - \frac{1}{36x} + C1 + \frac{1}{16} \quad (\% \text{ o23})$$

(% i24) y=collectterms(rhs(%),log(x),x);

$$y = \left(C3 + \frac{1}{24} \right) x^2 \log(x) + \left(C2 - \frac{5}{144} \right) x^2 - \frac{1}{36x} + C1 + \frac{1}{16} \quad (\% \text{ o24})$$

(% i25) sol :subst([C1=%k1,C2=%k2,C3=%k3-1/24],%);

$$y = k3x^2 \log(x) + \left(k2 - \frac{5}{144} \right) x^2 - \frac{1}{36x} + k1 + \frac{1}{16} \quad (\text{sol})$$

A comparison with the result given in the original documentation shows that integration constants have been added, but the results are equivalent and correct.

6 dchange

Function : dchange(tr,eq,y,x,new_func,new_var)Makes the change $tr : x=f(new_var)$ of independent variable x .

(% i26) /* these examples need the package contrib_odes\$*/
load(contrib_ode)\$

6.1 $(1 - x^2) y'' - x y' + n^2 y = 0$

(% i27) eq :(1-x^2)*diff(y(x),x,2)-x*diff(y(x),x)+n^2*y(x)=0;

$$(1 - x^2) \left(\frac{d^2}{dx^2} y(x) \right) - x \left(\frac{d}{dx} y(x) \right) + n^2 y(x) = 0 \quad (\text{eq})$$

(% i28) assume(n>0)\$

(% i30) tr :x=cos(t); itr :t=acos(x);

$$x = \cos(t) \quad (\text{tr})$$

$$t = \arccos(x) \quad (\text{itr})$$

(% i32) dchange(tr,eq,y(x),x,y(t),t)\$ eq1 :trigsimp(%);

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) + n^2 y(t) = 0 \quad (\text{eq1})$$

(% i33) ode2(%y(t),t);

$$y(t) = \%k1 \sin(nt) + \%k2 \cos(nt) \quad (\% \text{ o33})$$

(% i34) sol :dchange(itr,%y(t),t,y(x),x);

$$y(x) = \%k1 \sin(n \arccos(x)) + \%k2 \cos(n \arccos(x)) \quad (\text{sol})$$

6.2 $xy'' + y'/2 - y = 0$

(% i35) eq :x*diff(y(x),x,2)+diff(y(x),x)/2-y(x)=0;

$$x \left(\frac{d^2}{dx^2} y(x) \right) + \frac{d}{dx} y(x) - y(x) = 0 \quad (\text{eq})$$

(% i37) tr :x=t^2/4; itr :solve(%t)[2];

$$x = \frac{t^2}{4} \quad (\text{tr})$$

$$t = 2\sqrt{x} \quad (\text{itr})$$

(% i38) eq1 :dchange(tr,eq,y(x),x,y(t),t),ratsimp;

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) - y(t) = 0 \quad (\text{eq1})$$

(% i39) ode2(%y(t),t);

$$y(t) = \%e^{-t}\%k2 + \%e^t \%k1 \quad (\% \text{ o39})$$

(% i40) sol :dchange(itr,%y(t),t,y(x),x);

$$y(x) = \%e^{-(2\sqrt{x})}\%k2 + \%e^{2\sqrt{x}} \%k1 \quad (\text{sol})$$

6.3 $x^2 y'' - 2x y' + 2y = x^5 \log(x)$

(% i41) eq :x^2*diff(y(x),x,2)-2*x*diff(y(x),x)+2*y(x)=x^5*log(x);

$$x^2 \left(\frac{d^2}{dx^2} y(x) \right) - 2x \left(\frac{d}{dx} y(x) \right) + 2y(x) = x^5 \log(x) \quad (\text{eq})$$

(% i43) tr :x=exp(t); itr :solve(%t)[1];

$$x = \%e^t \quad (\text{tr})$$

$$t = \log(x) \quad (\text{itr})$$

(% i44) eq1 :dchange(tr,eq,y(x),x,y(t),t);

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) - 3 \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) + 2 y(t) = e^{5t} \quad (\text{eq1})$$

(% i45) ode2(%y(t),t);

$$y(t) = \frac{12e^{5t}t - 7e^{5t}}{144} + e^t k_2 + e^{2t} k_1 \quad (\% \text{ o45})$$

(% i46) sol :dchange(itr,%y(t),t,y(x),x);

$$y(x) = \frac{12x^5 \log(x) - 7x^5}{144} + k_1 x^2 + k_2 x \quad (\text{sol})$$

6.4 kamke 2.284

(% i47) eq : (2*x+1)^2*diff(y(x),x,2)-2*(2*x+1)*diff(y(x),x)-12*y(x)=3*x+1;

$$(2x+1)^2 \left(\frac{d^2}{dx^2} y(x) \right) - 2(2x+1) \left(\frac{d}{dx} y(x) \right) - 12 y(x) = 3x+1 \quad (\text{eq})$$

(% i49) tr :x=(%e^t-1)/2; itr :solve(tr,t)[1];

$$x = \frac{e^t - 1}{2} \quad (\text{tr})$$

$$t = \log(2x+1) \quad (\text{itr})$$

(% i50) eq1 :dchange(tr,eq,y(x),x,y(t),t);

$$4 \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t) \right) - 8 \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) - 12 y(t) = \frac{3(e^t - 1)}{2} + 1 \quad (\text{eq1})$$

(% i51) ode2(eq1,y(t),t);

$$y(t) = e^{-t} k_2 + e^{3t} k_1 - \frac{9e^t - 4}{96} \quad (\% \text{ o51})$$

(% i52) sol :dchange(itr,%y(t),t,y(x),x);

$$y(x) = k_1 (2x+1)^3 + \frac{k_2}{2x+1} - \frac{9(2x+1) - 4}{96} \quad (\text{sol})$$

(% i53) y(x)=map(factor,rhs(sol));

$$y(x) = k_1 (2x+1)^3 + \frac{k_2}{2x+1} - \frac{18x+5}{96} \quad (\% \text{ o53})$$

6.5 $y'' - y' + e^{4x} y = 0$

(% i54) eq :diff(y(x),x,2)-diff(y(x),x)+exp(4*x)*y(x)=0;

$$\frac{d^2}{dx^2} y(x) - \frac{d}{dx} y(x) + e^{4x} y(x) = 0 \quad (\text{eq})$$

(% i55) tr :x=log(t)/4;

$$x = \frac{\log(t)}{4} \quad (\text{tr})$$

(% i56) itr :solve(tr,t)[1];

$$t = \%e^{4x} \quad (\text{itr})$$

(% i57) eq1 :dchange(tr,eq,y(x),x,y(t),t);

$$16t^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t) \right) + 12t \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) + t y(t) = 0 \quad (\text{eq1})$$

(% i58) eq2 :subst(y(t)=y,eq1);

$$16t^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} y \right) + 12t \left(\frac{d}{dt} y \right) + t y = 0 \quad (\text{eq2})$$

(% i59) contrib_ode(eq2,y,t);

$$\left[y = \text{bessel_y} \left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{t}}{2} \right) \%k2 t^{\frac{1}{8}} + \text{bessel_j} \left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{t}}{2} \right) \%k1 t^{\frac{1}{8}} \right] \quad (\% \text{ o59})$$

(% i60) sol :subst(itr,%[1]);

$$y = \%e^{\frac{x}{2}} \text{bessel_y} \left(\frac{1}{4}, \frac{\%e^{2x}}{2} \right) \%k2 + \%e^{\frac{x}{2}} \text{bessel_j} \left(\frac{1}{4}, \frac{\%e^{2x}}{2} \right) \%k1 \quad (\text{sol})$$

7 odeC

Function : odeC(eq,r,x)Solves ODE in respect to expression r.

7.1 Bernoulli differential equation

(% i61) eq : 'diff(y,x)+2*y/(x+1)=2*sqrt(y)/(x+1);

$$\frac{d}{dx} y + \frac{2y}{x+1} = \frac{2\sqrt{y}}{x+1} \quad (\text{eq})$$

(% i62) odeC(eq,sqrt(y),x);

$$\sqrt{y} = \frac{x}{x+1} + \frac{\%c}{x+1} \quad (\% \text{ o62})$$

(% i63) ode2(eq,y,x);

$$-\log(\sqrt{y}-1) = \log(x+1) + \%c \quad (\% \text{ o63})$$

7.2 boj 360.

(% i64) eq : x*'diff(y,x,3)-'diff(y,x,2)-x*'diff(y,x)+y=-2*x^3;

$$x \left(\frac{d^3}{dx^3} y \right) - \frac{d^2}{dx^2} y - x \left(\frac{d}{dx} y \right) + y = -(2x^3) \quad (\text{eq})$$

(% i65) odeC(eq,'diff(y,x,2)+y,x);

$$\frac{d^2}{dx^2} y + y = 2y - x^3 + \%cx \quad (\% \text{ o65})$$

(% i66) ode2(%y,x);

$$y = x^3 + (6 - \%c)x + \%e^{-x} \%k2 + \%e^x \%k1 \quad (\% \text{ o66})$$

(% i67) sol :subst(%c=6-%k3,%);

$$y = x^3 + \%k3x + \%e^{-x} \%k2 + \%e^x \%k1 \quad (\text{sol})$$

7.3 sam 4.35.

```
(% i70) eq1 : 'diff(x,t)=y+z$
      eq2 : 'diff(y,t)=x+z$
      eq3 : 'diff(z,t)=x+y$
(% i72) odeC(eq1+eq2+eq3,x+y+z,t)$
      s1 :subst(%c=3*C1,%);
```

$$z + y + x = 3e^{2t}C1 \quad (s1)$$

```
(% i74) odeC(eq1-eq2,y-x,t)$
      s2 :subst(%c=3*C2,%);
```

$$y - x = 3e^{-t}C2 \quad (s2)$$

```
(% i76) odeC(eq2-eq3,z-y,t)$
      s3 :subst(%c=3*C3,%);
```

$$z - y = 3e^{-t}C3 \quad (s3)$$

```
(% i77) sol :solve([s1,s2,s3],[x,y,z])[1],expand;
```

$$\left[x = - (e^{-t}C3) - 2e^{-t}C2 + e^{2t}C1, y = - (e^{-t}C3) + e^{-t}C2 + e^{2t}C1, z = 2e^{-t}C3 + e^{-t}C2 + e^{2t}C1 \right] \quad (sol)$$

Test :

```
(% i80) subst(sol,[eq1,eq2,eq3])$
      ev(% , nouns)$
      makelist(rhs(%[k])-lhs(%[k]),k,1,3);
```

$$[0, 0, 0] \quad (\% o80)$$

7.4 filipov 65.

```
(% i81) eq : 'diff(y,x)=sqrt(4*x+2*y-1);
```

$$\frac{d}{dx}y = \sqrt{2y + 4x - 1} \quad (eq)$$

```
(% i82) ode2(eq,y,x);
```

(% o82)

false

```
(% i84) /*answer of maxima question is positive*/
      assume(p>0);
      contrib_ode(eq,y,x);
```

$$[p > 0] \quad (\% o83)$$

$$\left[- \left(\frac{(8 \log(\sqrt{2y + 4x - 1} + 2)) + 4\sqrt{2y + 4x - 1} - 4x + 1}{4} \right) = \%c \right] \quad (\% o84)$$

```
(% i85) odeC(eq,2*y+4*x-1,x);
```

$$- \left(2 \log(\sqrt{2y + 4x - 1} + 2) \right) + \sqrt{2y + 4x - 1} + 2 = x + \%c \quad (\% o85)$$

8 solvet

Function : solvet(eq,x)Returns rectform solution of polynomial equation. In "casus irreducibilis" give real solutions expressed in trigonometric functions. One version of "solvet" is :

```
(% i86) solvet(eq,x):=block([polf,spr,k],
  spr:solve(eq,x),
  polf(x):=block([rx],
    rx:rectform(x),
    if freeof(%i,x) or atom(x) or
    freeof(sin,rx) then return(rx) else
    map(polarform,x),
    rectform(%%),
    trigsimp(%%),
    trigreduce(%%),
    makelist(x=polf(rhs(spr[k])),k,1,length(spr)),
    sort(%%)
  )$
```

Examples

```
(% i87) solvet(x^3-3*x^2+1,x);
```

$$\left[x = 2 \cos\left(\frac{\pi}{9}\right) + 1, x = 2 \cos\left(\frac{5\pi}{9}\right) + 1, x = 2 \cos\left(\frac{7\pi}{9}\right) + 1 \right] \quad (\% \text{ o87})$$

```
(% i88) solvet(x^6-3*x^5-3*x^4+12*x^3-3*x^2-6*x+2=0,x);
```

$$\left[x = 1, x = 1 - \sqrt{3}, x = \sqrt{3} + 1, x = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right), x = 2 \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right), x = 2 \cos\left(\frac{8\pi}{9}\right) \right] \quad (\% \text{ o88})$$

```
(% i89) solvet(x^3-15*x-5,x);
```

$$\left[x = 2\sqrt{5} \cos\left(\frac{\operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt{19}}{3}\right) - \frac{2\pi}{3}}{3}\right), x = 2\sqrt{5} \cos\left(\frac{\operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt{19}}{3}\right) + \frac{2\pi}{3}}{3}\right), x = 2\sqrt{5} \cos\left(\frac{\operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt{19}}{3}\right)}{3}\right) \right] \quad (\% \text{ o89})$$

```
(% i90) solve(x^3-15*x-5,x);
```

$$\left[x = \left(- \left(\frac{\sqrt{3}\%i}{2} \right) - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{5\sqrt{19}\%i}{2} + \frac{5}{2} \right)^{\frac{1}{3}} + \frac{5 \left(\frac{\sqrt{3}\%i}{2} - \frac{1}{2} \right)}{\left(\frac{5\sqrt{19}\%i}{2} + \frac{5}{2} \right)^{\frac{1}{3}}}, x = \left(\frac{\sqrt{3}\%i}{2} - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{5\sqrt{19}\%i}{2} + \frac{5}{2} \right)^{\frac{1}{3}} + \frac{5 \left(- \left(\frac{\sqrt{3}\%i}{2} \right) \right)}{\left(\frac{5\sqrt{19}\%i}{2} + \frac{5}{2} \right)^{\frac{1}{3}}} \right] \quad (\% \text{ o90})$$

9 ode1_ic

Function : ode1_ic(eqn, dvar, ivar, ic)The function ode1_ic solves an ordinary differential equation(ODE) of first order with initial condition $y(x_0) = y_0$. Here ic is list $[x_0, y_0]$. Examples :

9.1 $x^2 y' + 3xy = \sin(x)/x, y(\pi) = 0$

```
(% i91) ode1_ic(x^2*'diff(y,x) + 3*y*x = sin(x)/x,y,x,[%pi,0]);
```

$$y = - \left(\frac{\cos(x) + 1}{x^3} \right) \quad (\% \text{ o91})$$

$$9.2 \quad (y^4 * e^y + 2 * x) * y' = y, \quad y(0) = 1$$

(% i92) eq : (y^4*exp(y)+2*x)*diff(y,x)=y;

$$(\%e^y y^4 + 2x) \left(\frac{d}{dx} y \right) = y \quad (\text{eq})$$

(% i93) ode1_ic(eq,y,x,[0,1]);

$$\frac{\%e^y y^3 - \%e^y y^2 - x}{y^2} = 0 \quad (\% \text{ o93})$$

(% i94) solve(% ,x);

$$[x = \%e^y y^3 - \%e^y y^2] \quad (\% \text{ o94})$$

$$9.3 \quad x * y' + y = 2 * y^2 * \log(x), \quad y(1) = 1/2$$

(% i95) eq : x*diff(y,x)+y=2*y^2*log(x);

$$x \left(\frac{d}{dx} y \right) + y = 2 \log(x) y^2 \quad (\text{eq})$$

(% i96) ode1_ic(eq,y,x,[1,1/2]);

$$y = \frac{1}{2 \log(x) + 2} \quad (\% \text{ o96})$$

$$9.4 \quad (x^2 - 1) * y' + 2 * x * y^2 = 0, \quad y(0) = 1$$

(% i97) eq : (x^2-1)*diff(y,x)+2*x*y^2=0\$

(% i98) ode1_ic(eq,y,x,[0,1]);

$$y = \frac{1}{\log(1 - x^2) + 1} \quad (\% \text{ o98})$$

10 ode2_ic

Function : ode2_ic(eqn, dvar, ivar, ic) The function ode2_ic solve an ordinary differential equation(ODE) of second order with initial conditions $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$. Here ic is list $[x_0, y_0, y_1]$. Examples :

$$10.1 \quad y'' + y * y'^3 = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$$

(% i99) eq : 'diff(y,x,2) + y*'diff(y,x)^3 = 0;

$$\frac{d^2}{dx^2} y + y \left(\frac{d}{dx} y \right)^3 = 0 \quad (\text{eq})$$

(% i100) sol :ode2_ic(eq,y,x,[0,0,2]);

$$y = \left(\sqrt{9x^2 + 1} + 3x \right)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{\left(\sqrt{9x^2 + 1} + 3x \right)^{\frac{1}{3}}} \quad (\text{sol})$$

Test

```
(% i101) ev(rhs(sol),x=0);
```

0 (o101)

```
(% i103) diff(rhs(sol),x)$ ev(%,x=0);
```

2 (o103)

```
(% i106) subst(sol,eq)$
ev(%, nouns)$
radcan(%);
```

0 = 0 (o106)

10.2 $y'' = 128y^3, y(0) = 1, y'(0) = 8$

```
(% i107) eq : 'diff(y,x,2)=128*y^3;
```

$$\frac{d^2}{dx^2}y = 128y^3 \quad (\text{eq})$$

-> /* Due to a bug in odes, this example leads to an error message
the bug is due to a bug in Maxima itself, so it is impossible to correct
ode2_ic(eq,y,x,[0,1,8]);
the command is put in comment*/;

10.3 $y'' + y = 1/\cos(x), y(0)=1, y'(0)=0$.

```
(% i108) eq : 'diff(y,x,2)+y = 1/cos(x);
```

$$\frac{d^2}{dx^2}y + y = \frac{1}{\cos(x)} \quad (\text{eq})$$

```
(% i109) sol :ode2_ic(eq,y,x,[0,1,0]);
```

$$y = \cos(x) \log(\cos(x)) + x \sin(x) + \cos(x) \quad (\text{sol})$$

11 P_iter

Function : P_iter(eq, x, y, x0, y0, n).Solves first order differential equation using Picard iterative process.(https://www.ams.stonybrook.edu/~jiao/teaching/ams501_fall11/notes/picard.pdf)Examples :

11.1 $y' = x^2 + y^2, y(0) = 0$

```
(% i110) eq : 'diff(y,x)=x^2+y^2;
```

$$\frac{d}{dx}y = y^2 + x^2 \quad (\text{eq})$$

```
(% i112) x0 :0$ y0 :0$
```

```
(% i113) for k :0 thru 3 do
print(P_iter(eq,x,y,x0,y0,k))$
```

$$0 \frac{x^3}{3} \frac{x^7}{63} + \frac{x^3}{3} \frac{x^{15}}{59535} + \frac{2x^{11}}{2079} + \frac{x^7}{63} + \frac{x^3}{3}$$

11.2 $y' = 2x(1 + y), y(0) = 0.$

(% i114) eq :diff(y,x)=2*x*(1+y);

$$\frac{d}{dx}y = 2x (y + 1) \quad (\text{eq})$$

(% i116) x0 :0\$ y0 :0\$

(% i117) for k :0 thru 5 do
print(P_iter(eq,x,y,x0,y0,k))\$

$$0 \quad x^2 \frac{x^4}{2} + x^2 \frac{x^6}{6} + \frac{x^4}{2} + x^2 \frac{x^8}{24} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^4}{2} + x^2 \frac{x^{10}}{120} + \frac{x^8}{24} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^4}{2} + x^2$$

12 ode1taylor

Function : ode1taylor(eq, x0, y0, n).Solves first order differential equation using Taylor-series expansion.ode1taylor was buggy in the original odes package. The bugs are solved in this version of odes2

12.1 $y' = x + y^2, y(0) = 1$

(% i118) eq :diff(y(x),x)=x+y(x)^2;

$$\frac{d}{dx}y(x) = y(x)^2 + x \quad (\text{eq})$$

(% i119) ode1taylor(eq,0,1,6);

$$1 + x + \frac{3x^2}{2} + \frac{4x^3}{3} + \frac{17x^4}{12} + \frac{31x^5}{20} + \frac{149x^6}{90} + \dots \quad (\% \text{ o119/T/})$$

12.2 $y' = x^2 + y^2, y(0) = 0$

(% i120) eq :diff(y(x),x)=x^2+y(x)^2;

$$\frac{d}{dx}y(x) = y(x)^2 + x^2 \quad (\text{eq})$$

(% i121) ode1taylor(eq,0,0,15);

$$\frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{2079} + \frac{13x^{15}}{218295} + \dots \quad (\% \text{ o121/T/})$$

12.3 $y' = x - y^2, y(1) = -1$

(% i122) eq :diff(y(x),x)=x-y(x)^2;

$$\frac{d}{dx}y(x) = x - y(x)^2 \quad (\text{eq})$$

(% i123) ode1taylor(eq,1,-1,5);

$$-1 + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + \frac{(x-1)^4}{6} + \frac{(x-1)^5}{60} + \dots \quad (\% \text{ o123/T/})$$

13 ode2taylor (bug corrected from original odes)

Function : ode2taylor(eq, x0, y0, y1, n).Solves second order differential equation using Taylor-series expansion.ode2taylor was buggy in the original odes package. The bugs are solved in this version of odes2Examples

13.1 Airy's Equation $y''-xy=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

(% i124) eq : 'diff(y(x),x,2)-x*y(x)=0;

$$\frac{d^2}{dx^2} y(x) - x y(x) = 0 \quad (\text{eq})$$

(% i125) ode2taylor(eq,0,1,0,15);

$$1 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^6}{180} + \frac{x^9}{12960} + \frac{x^{12}}{1710720} + \frac{x^{15}}{359251200} + \dots \quad (\% \text{ o125/T/})$$

13.2 $y'' = (y')^2 + x*y$, $y(1) = 1$, $y'(0) = 0$

(% i126) eq : 'diff(y(x),x,2)='diff(y(x),x,1)^2+x*y(x);

$$\frac{d^2}{dx^2} y(x) = \left(\frac{d}{dx} y(x) \right)^2 + x y(x) \quad (\text{eq})$$

(% i127) ode2taylor(eq,1,1,0,5);

$$1 + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^4}{8} + \frac{(x-1)^5}{12} + \dots \quad (\% \text{ o127/T/})$$

13.3 $y''+xy+y=0$

(% i128) eq : 'diff(y(x),x,2)+x*'diff(y(x),x)+y(x)=0;

$$\frac{d^2}{dx^2} y(x) + x \left(\frac{d}{dx} y(x) \right) + y(x) = 0 \quad (\text{eq})$$

(% i129) ode2taylor(eq,0,0,1,15);

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{15} - \frac{x^7}{105} + \frac{x^9}{945} - \frac{x^{11}}{10395} + \frac{x^{13}}{135135} - \frac{x^{15}}{2027025} + \dots \quad (\% \text{ o129/T/})$$

(% i130) sum((-1)^n*2^n*n!*(x^(2*n+1))/(2*n+1)!,n,0,7);

$$-\left(\frac{x^{15}}{2027025} \right) + \frac{x^{13}}{135135} - \frac{x^{11}}{10395} + \frac{x^9}{945} - \frac{x^7}{105} + \frac{x^5}{15} - \frac{x^3}{3} + x \quad (\% \text{ o130})$$

14 ode1exact

Function : ode1exact(eq).Solves first order exact equation. <https://tutorial.math.lamar.edu/classes/de/exact.aspx>Examples :

(% i131) kill(all);

done (% o0)

(% i1) load(odes2)\$

The solutions of the following equations are false with the original odes.mac. It is due to a bug in ode2. The new version odes2 correct this problem (solving directly without ode2) and so the solutions are now correct.

14.1 $2xydx + (x^2 + 3y^2)dy = 0$

Bug in ode2 so that the solution is false. The new version of odes correct this problem (solving directly without ode2)

(% i2) `eq : 2*x*y*dx + (x^2 + 3*y^2)*dy = 0;`

$$dy (3y^2 + x^2) + 2dxx y = 0 \quad (\text{eq})$$

(% i3) `ode1exact(eq);`

$$y^3 + x^2 y = C \quad (\% \text{ o3})$$

14.2 $(6x^2 - y + 3)dx + (3y^2 - x - 3)dy = 0$

(% i4) `eq : (6*x^2 - y + 3)*dx + (3*y^2 - x - 3)*dy = 0;`

$$dy (3y^2 - x - 3) + dx (-y + 6x^2 + 3) = 0 \quad (\text{eq})$$

(% i5) `ode1exact(eq);`

$$y^3 - xy - 3y + 2x^3 + 3x = C \quad (\% \text{ o5})$$

14.3 $\exp(y)dx + (2y + x\exp(y))dy = 0$

(% i6) `eq : exp(y)*dx + (2*y + x*exp(y))*dy = 0;`

$$dy (2y + e^y x) + e^y dx = 0 \quad (\text{eq})$$

(% i7) `ode1exact(eq);`

$$y^2 + e^y x = C \quad (\% \text{ o7})$$

14.4 $(x dx + y dy) / \sqrt{x^2 + y^2} + (x dy - y dx) / x^2 = 0$

(% i8) `eq : (x*dx + y*dy)/sqrt(x^2 + y^2) + (x*dy - y*dx)/x^2 = 0;`

$$\frac{dy y + dx x}{\sqrt{y^2 + x^2}} + \frac{dy x - dx y}{x^2} = 0 \quad (\text{eq})$$

(% i9) `ode1exact(eq);`

$$\sqrt{y^2 + x^2} + \frac{y}{x} = C \quad (\% \text{ o9})$$

15 `intfactor1`

Function : `intfactor(eq, omega)`. Find `intfactor mu = mu(omega)` of the first order differential equation. [https://math.libretexts.org/Bookshelves/Differential_Equations/Differential_Equations_for_Engineers_\(Lebl\)/1:_First_order_ODEs/1.8:_Exact_Equations](https://math.libretexts.org/Bookshelves/Differential_Equations/Differential_Equations_for_Engineers_(Lebl)/1:_First_order_ODEs/1.8:_Exact_Equations)

15.1 $(1 + y^2)dx + x*y*dy = 0$

(% i10) eq:(1+y^2)*dx+x*y*dy=0;

$$dx (y^2 + 1) + dy xy = 0 \quad (\text{eq})$$

(% i11) intfactor1(eq,x);

$$x \quad (\% \text{ o11})$$

(% i12) odelexact(eq*%);

$$\frac{x^2 y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = C \quad (\% \text{ o12})$$

15.2 $(x*y^2 - 2*y^3)dx + (3 - 2*x*y^2)dy = 0$

(% i13) eq:(x*y^2-2*y^3)*dx+(3-2*x*y^2)*dy=0;

$$dx (xy^2 - 2y^3) + dy (3 - 2xy^2) = 0 \quad (\text{eq})$$

(% i14) intfactor1(eq,y);

$$\frac{1}{y^2} \quad (\% \text{ o14})$$

(% i15) odelexact(eq*%);

$$-(2xy) - \frac{3}{y} + \frac{x^2}{2} = C \quad (\% \text{ o15})$$

15.3 $y*dx + (x^2 + y^2 - x)*dy = 0$

(% i16) eq:y*dx+(x^2+y^2-x)*dy=0;

$$dy (y^2 + x^2 - x) + dx y = 0 \quad (\text{eq})$$

(% i17) odelexact(eq);

(% o17)

false

(% i18) intfactor1(eq,x^2+y^2);

$$\frac{1}{y^2 + x^2} \quad (\% \text{ o18})$$

(% i19) odelexact(eq*%);

$$y + \operatorname{atan}\left(\frac{x}{y}\right) = C \quad (\% \text{ o19})$$

15.4 $x*y*dx + (2*x^2 + 3*y^2 - 20)*dy = 0$

(% i20) eq :x*y*dx+(2*x^2+3*y^2-20)*dy=0;

$$dy (3y^2 + 2x^2 - 20) + dxxy = 0 \quad (\text{eq})$$

(% i21) intfactor1(eq,y);

$$y^3 \quad (\% \text{ o21})$$

(% i22) ode1exact(eq*%);

$$\frac{y^6}{2} + \frac{x^2y^4}{2} - 5y^4 = C \quad (\% \text{ o22})$$

15.5 $(x^2*y^3 + 6*y^5)*dx + (2*x^3*y^2 + 12*x^4)*dy = 0$

(% i23) eq :(x^2*y^3+6*y^5)*dx+(2*x^3*y^2+12*x^4)*dy=0;

$$dx (6y^5 + x^2y^3) + dy (2x^3y^2 + 12x^4) = 0 \quad (\text{eq})$$

(% i24) intfactor1(eq/y,x*y);

$$\frac{1}{x^4y^4} \quad (\% \text{ o24})$$

(% i25) ode1exact(-eq/y*%);

$$\frac{1}{xy^2} + \frac{3}{y^4} + \frac{2}{x^3} = C \quad (\% \text{ o25})$$

Other method :

(% i26) mu :x^a*y^b;

$$x^a y^b \quad (\text{mu})$$

(% i27) diff(mu*(x^2*y^3+6*y^5),y)=diff(mu*(2*x^3*y^2+12*x^4),x)\$

(% i28) factor(lhs(%)-rhs(%));

$$x^a y^b (6by^4 + 30y^4 + bx^2y^2 - 2ax^2y^2 - 3x^2y^2 - 12ax^3 - 48x^3) \quad (\% \text{ o28})$$

(% i29) collectterms(%/mu,x,y);

$$(6b + 30)y^4 + (b - 2a - 3)x^2y^2 + (-12a - 48)x^3 \quad (\% \text{ o29})$$

(% i30) solve([coeff(%,y^4),coeff(%,x^2*y^2),coeff(%,x^3)],[a,b]);

solve: dependent equations eliminated: (2)

$$[[a = -4, b = -5]] \quad (\% \text{ o30})$$

(% i31) 'mu=subst(%[1],mu);

$$mu = \frac{1}{x^4y^5} \quad (\% \text{ o31})$$

16 odeL

Function : odeL(eqn, dvar, ivar) The function odeL solves an linear ODEs with constant coefficients. Examples :

```
(% i32) load(contrib_ode)$
```

16.1 $y''' - 2y'' + y' = 0$.

```
(% i33) eq : 'diff(y,x,3)-2*'diff(y,x,2)+'diff(y,x) = 0;
```

$$\frac{d^3}{dx^3}y - 2 \left(\frac{d^2}{dx^2}y \right) + \frac{d}{dx}y = 0 \quad (\text{eq})$$

```
(% i34) odeL(eq,y,x);
```

$$y = \%e^x C3x + \%e^x C2 + C1 \quad (\% \text{ o34})$$

16.2 $y'''' + 8y'' + 16y = x \exp(3x) + \sin(x)^2 + 1$

```
(% i35) eq : 'diff(y,x,4)+8*'diff(y,x,2)+16*y=x*exp(3*x)+sin(x)^2+1;
```

$$\frac{d^4}{dx^4}y + 8 \left(\frac{d^2}{dx^2}y \right) + 16y = \sin(x)^2 + \%e^{3x}x + 1 \quad (\text{eq})$$

```
(% i36) sol :odeL(eq,y,x);
```

$$y = - \left(\frac{(26065x - 1992) \sin(2x) + (- (4394x^2) + 1040x + 24828) \cos(2x) - 1664\%e^{3x}x + 1536\%e^{3x} - 26364}{281216} \right) + C4 \quad (\text{sol})$$

```
(% i37) ode_check(eq,sol);
```

$$0 \quad (\% \text{ o37})$$

16.3 $y''' - 3y'' + y = \sin(x)^3$

```
(% i38) eq : 'diff(y,x,3)-3*'diff(y,x,2)+y=sin(x)^3;
```

$$\frac{d^3}{dx^3}y - 3 \left(\frac{d^2}{dx^2}y \right) + y = \sin(x)^3 \quad (\text{eq})$$

```
(% i39) /* solvet was buggy, corrected in odes2)*/  
solvet(k^3-3*k^2+1=0,k);
```

$$\left[k = 2 \cos\left(\frac{\pi}{9}\right) + 1, k = 2 \cos\left(\frac{5\pi}{9}\right) + 1, k = 2 \cos\left(\frac{7\pi}{9}\right) + 1 \right] \quad (\% \text{ o39})$$

```
-> /* odeL depends of ode2, which uses here Laplace. This bug means that the returned result is incorrect.  
sol :odeL(eq,y,x); */;
```

17 odeL_ic

Function : odeL_ic(eqn, dvar, ivar, ic) The function odeL_ic solves initial value problems for linear ODEs with constant coefficients. Examples :

17.1 $y''' + y'' = x + \exp(-x)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$.

(% i40) eq : 'diff(y,x,3)+'diff(y,x,2)=x + exp(-x);

$$\frac{d^3}{dx^3}y + \frac{d^2}{dx^2}y = x + \%e^{-x} \quad (\text{eq})$$

(% i41) odeL_ic(eq, y, x, [0, 1, 0, 1]),expand;

$$y = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \%e^{-x}x + 3x + 4\%e^{-x} - 3 \quad (\% \text{ o41})$$

17.2 $y'''' - y = 8 * \exp(x)$, $y(0)=0$, $y'(0)=2$, $y''(0)=4$, $y'''(0)=6$

(% i42) eq : 'diff(y,x,4)-y=8*exp(x);

$$\frac{d^4}{dx^4}y - y = 8\%e^x \quad (\text{eq})$$

(% i43) sol :odeL_ic(eq, y, x, [0, 0, 2, 4, 6]);

$$y = \%e^{-x} \left(2\%e^x \sin(x) + 2\%e^x \cos(x) + 2\%e^{2x}x - 3\%e^{2x} + 1 \right) - 2 \sin(x) - 2 \cos(x) + 3\%e^x - \%e^{-x} \quad (\text{sol})$$

(% i44) expand(sol);

$$y = 2\%e^x x \quad (\% \text{ o44})$$

17.3 $y'''' - y' = 0$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$, $y''(0)=0$, $y'''(0)=1$, $y''''(0)=2$.

(% i45) eq : 'diff(y,x,5) - diff(y,x)=0;

$$\frac{d^5}{dx^5}y - \frac{d}{dx}y = 0 \quad (\text{eq})$$

(% i46) sol :odeL_ic(eq,y,x,[0,0,1,0,1,2]);

$$y = \cos(x) + \%e^x - 2 \quad (\text{sol})$$

Test

(% i47) ode_check(eq,sol);

$$0 \quad (\% \text{ o47})$$

(% i49) makelist(diff(rhs(sol),x,k),k,0,4)\$
ev(% ,x=0);

$$[0, 1, 0, 1, 2] \quad (\% \text{ o49})$$

18 fs

Function : fs(eq, y, x).Find fundamental system of solutions of the linear n-th order differential equation with constant coefficients.

18.1 Example 1

```
(% i50) kill(all)$
(% i1) load(odes2)$
(% i2) eq : 'diff(y,x,3)+3*'diff(y,x,2)-10*'diff(y,x)=x-1 ;
```

$$\frac{d^3}{dx^3}y + 3 \left(\frac{d^2}{dx^2}y \right) - 10 \left(\frac{d}{dx}y \right) = x - 1 \quad (\text{eq})$$

```
(% i3) fs(eq,y,x);
```

$$\left[1, \%e^{-(5x)}, \%e^{2x} \right] \quad (\% \text{ o3})$$

```
(% i4) sol :odeL(eq,y,x);
```

$$y = - \left(\frac{\%e^{-(5x)} \left(350\%e^{5x}x^2 - 490\%e^{5x}x + 125\%e^{7x} - 77\%e^{5x} - 48 \right)}{7000} \right) + \%e^{2x}C3 + \%e^{-(5x)}C2 + C1 \quad (\text{sol})$$

```
(% i5) expand(sol);
```

$$y = - \left(\frac{x^2}{20} \right) + \frac{7x}{100} + \%e^{2x}C3 + \%e^{-(5x)}C2 + C1 - \frac{\%e^{2x}}{56} + \frac{6\%e^{-(5x)}}{875} + \frac{11}{1000} \quad (\% \text{ o5})$$

18.2 Example 2

```
(% i6) eq : 'diff(y,x,4)+8*'diff(y,x,2)+16*y=x^2*exp(x)*sin(x);
```

$$\frac{d^4}{dx^4}y + 8 \left(\frac{d^2}{dx^2}y \right) + 16y = \%e^x x^2 \sin(x) \quad (\text{eq})$$

```
(% i7) fs(eq,y,x);
```

$$[\cos(2x), x \cos(2x), \sin(2x), x \sin(2x)] \quad (\% \text{ o7})$$

```
(% i8) sol :odeL(eq,y,x);
```

$$y = - \left(((560x + 2231) \sin(2x) + (208 - 670x) \cos(2x) + (- (600\%e^x x^2) + 2080\%e^x x - 2144\%e^x) \sin(x) + (800\%e^x \right) \quad (\text{sol})$$

18.3 Example 3

```
(% i9) eq : 'diff(y,x,8)+'diff(y,x,2)=x^5 ;
```

$$\frac{d^8}{dx^8}y + \frac{d^2}{dx^2}y = x^5 \quad (\text{eq})$$

```
(% i10) solvet(k^8+k^2=0,k);
```

$$\left[k = 0, k = - \left(\frac{\%i}{2} \right) - \frac{\sqrt{3}}{2}, k = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\%i}{2}, k = \frac{\%i}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}, k = \frac{\%i}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}, k = -\%i, k = \%i \right] \quad (\% \text{ o10})$$

```
(% i11) fs(eq,y,x);
```

$$\left[1, \%e^{-\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)} \cos\left(\frac{x}{2}\right), \%e^{\frac{\sqrt{3}x}{2}} \cos\left(\frac{x}{2}\right), \%e^{-\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)} \sin\left(\frac{x}{2}\right), \%e^{\frac{\sqrt{3}x}{2}} \sin\left(\frac{x}{2}\right), x, \cos(x), \sin(x) \right] \quad (\% \text{ o11})$$

(% i12) sol :odeL(eq,y,x);

$$y = \frac{1680 \sin(x) + x^7 - 5040x + 42 \operatorname{ilt}\left(\frac{80g^{10089^2} - 40}{g^{10089^4} - g^{10089^2} + 1}, g^{10089}, x\right)}{42} + C8 \sin(x) + C7 \cos(x) + C6x + \%e^{\frac{\sqrt{3}x}{2}} C5 \sin(x) \quad (\text{sol})$$

18.4 Example 4

(% i13) eq : 'diff(y,x,6)-3*'diff(y,x,5)-3*'diff(y,x,4)+12*'diff(y,x,3)-3*'diff(y,x,2)-6*'diff(y,x,1)+2*y=2*x^7+sin(x)^3;

$$\frac{d^6}{dx^6}y - 3\left(\frac{d^5}{dx^5}y\right) - 3\left(\frac{d^4}{dx^4}y\right) + 12\left(\frac{d^3}{dx^3}y\right) - 3\left(\frac{d^2}{dx^2}y\right) - 6\left(\frac{d}{dx}y\right) + 2y = \sin(x)^3 + 2x^7 \quad (\text{eq})$$

(% i14) fs(eq,y,x);

$$\left[\%e^x, \%e^{2\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)x}, \%e^{2\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right)x}, \%e^{2\cos\left(\frac{8\pi}{9}\right)x}, \%e^{x-\sqrt{3}x}, \%e^{\sqrt{3}x+x} \right] \quad (\% \text{ o14})$$

(% i15) sol :odeL(eq,y,x)\$

(% i16) expand(%);

$$y = -\left(\frac{28535483\frac{3}{2}\%e^x \sinh(\sqrt{3}x)}{2041}\right) + \frac{14827640\%e^x \cosh(\sqrt{3}x)}{2041} + \frac{943 \sin(3x)}{8145160} - \frac{1071 \cos(3x)}{8145160} + \frac{3 \sin(x)}{1768} + \frac{63 \cos(x)}{1768} \quad (\% \text{ o16})$$

19 partsol

Function : partsol(eq, y, x). Find partial solution of the linear n-th order differential equation with constant coefficients.

(% i17) kill(all)\$

(% i1) load(odes2)\$

19.1 Example 1

(% i2) eq : 'diff(y,x,3)+3*'diff(y,x,2)-10*'diff(y,x)=x-1;

$$\frac{d^3}{dx^3}y + 3\left(\frac{d^2}{dx^2}y\right) - 10\left(\frac{d}{dx}y\right) = x - 1 \quad (\text{eq})$$

(% i3) partsol(eq,y,x);

$$-\left(\frac{\%e^{-(5x)}\left(350\%e^{5x}x^2 - 490\%e^{5x}x + 125\%e^{7x} - 77\%e^{5x} - 48\right)}{7000}\right) \quad (\% \text{ o3})$$

(% i4) expand(%);

$$-\left(\frac{x^2}{20}\right) + \frac{7x}{100} - \frac{\%e^{2x}}{56} + \frac{6\%e^{-(5x)}}{875} + \frac{11}{1000} \quad (\% \text{ o4})$$

(% i5) odeL(eq,y,x);

$$y = -\left(\frac{\%e^{-(5x)}\left(350\%e^{5x}x^2 - 490\%e^{5x}x + 125\%e^{7x} - 77\%e^{5x} - 48\right)}{7000}\right) + \%e^{2x}C3 + \%e^{-(5x)}C2 + C1 \quad (\% \text{ o5})$$

19.2 Example 2

(% i6) eq : 'diff(y,x,4)+'diff(y,x,3)-3*'diff(y,x,2)-5*'diff(y,x)-2*y=exp(2*x)-exp(-x);

$$\frac{d^4}{dx^4}y + \frac{d^3}{dx^3}y - 3\left(\frac{d^2}{dx^2}y\right) - 5\left(\frac{d}{dx}y\right) - 2y = e^{2x} - e^{-x} \quad (\text{eq})$$

(% i7) partsol(eq,y,x);

$$\frac{e^{-x} \left(9x^3 + 18x^2 + \left(6e^{3x} + 18 \right) x - 8e^{3x} + 8 \right)}{162} \quad (\% \text{ o7})$$

(% i8) odeL(eq,y,x);

$$y = \frac{e^{-x} \left(9x^3 + 18x^2 + \left(6e^{3x} + 18 \right) x - 8e^{3x} + 8 \right)}{162} + e^{-x} C4x^2 + e^{-x} C3x + e^{2x} C2 + e^{-x} C1 \quad (\% \text{ o8})$$

(% i9) expand(%)\$

(% i10) y=collectterms(rhs(%),exp(-x),exp(2*x));

$$y = e^{-x} \left(\frac{x^3}{18} + C4x^2 + \frac{x^2}{9} + C3x + \frac{x}{9} + C1 + \frac{4}{81} \right) + e^{2x} \left(\frac{x}{27} + C2 - \frac{4}{81} \right) \quad (\% \text{ o10})$$

19.3 Example 3

(% i11) eq : 'diff(y,x,3)+'diff(y,x,1)=1/cos(x);

$$\frac{d^3}{dx^3}y + \frac{d}{dx}y = \frac{1}{\cos(x)} \quad (\text{eq})$$

(% i12) partsol(eq,y,x);

$$\text{ilt} \left(\frac{\text{laplace} \left(\frac{1}{\cos(x)}, x, g11444 \right)}{g11444^3 + g11444}, g11444, x \right) \quad (\% \text{ o12})$$

There is a bug in Maxima Laplace integration ...

19.4 Example 4

(% i13) eq : 'diff(y,x,3)+8*'diff(y,x,1)+9*y=cos(x)^3;

$$\frac{d^3}{dx^3}y + 8\left(\frac{d}{dx}y\right) + 9y = \cos^3(x) \quad (\text{eq})$$

(% i14) partsol(eq,y,x);

$$- \left((e^{-x} (1080e^{\frac{3x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{35}x}{2}\right) + 696\sqrt{35}e^{\frac{3x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{35}x}{2}\right) + 143\sqrt{35}e^x \sin(3x) - 429\sqrt{35}e^x \cos(3x) - 69 \right) \right) \quad (\% \text{ o14})$$

(% i15) sol :odeL(eq,y,x);

$$y = - \left((e^{-x} (1080e^{\frac{3x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{35}x}{2}\right) + 696\sqrt{35}e^{\frac{3x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{35}x}{2}\right) + 143\sqrt{35}e^x \sin(3x) - 429\sqrt{35}e^x \cos(3x) - 69 \right) \right) \quad (\text{sol})$$

Test

(% i16) load(contrib_ode)\$

(% i17) ode_check(eq,sol);

0

(% o17)

20 odeM

Function : odeM(A,F,t) Find solutions of linear system of ODEs with constant coefficients in matrix form : $Y' = AY + F$

20.1 Example 1 : $Y' = AY + F$.

```
(% i18) kill(all)$
(% i1)  load(odes2)$
(% i2)  A :matrix([1,1],[4,1]);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A})$$

```
(% i3)  F :transpose([t-2,4*t-1]);
```

$$\begin{bmatrix} t-2 \\ 4t-1 \end{bmatrix} \quad (\text{F})$$

```
(% i4)  sol :odeM(A,F,t);
```

$$\begin{bmatrix} -t + \left(\frac{\%e^{3t}}{4} - \frac{\%e^{-t}}{4}\right) C2 + \left(\frac{\%e^{3t}}{2} + \frac{\%e^{-t}}{2}\right) C1 \\ \left(\frac{\%e^{3t}}{2} + \frac{\%e^{-t}}{2}\right) C2 + \left(\%e^{3t} - \%e^{-t}\right) C1 + 1 \end{bmatrix} \quad (\text{sol})$$

Test

```
(% i6)  diff(sol,t)-A.sol-F$
        expand(%);
```

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\% \text{ o6})$$

20.2 Example 2 : $Y' = AY$.

```
(% i7)  A :matrix([2,0,-8,-3],[-18,-1,0,0],[-9,-3,-25,-9],[33,10,90,32]);
```

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -8 & -3 \\ -18 & -1 & 0 & 0 \\ -9 & -3 & -25 & -9 \\ 33 & 10 & 90 & 32 \end{bmatrix} \quad (\text{A})$$

```
(% i8)  F :transpose([0,0,0,0])$
```

```
(% i9)  charpoly(A, x),factor;
```

$$(x^2 - 4x + 13)^2 \quad (\% \text{ o9})$$

```
(% i10) solve(%);
```

$$[x = 2 - 3\%i, x = 3\%i + 2] \quad (\% \text{ o10})$$

```
(% i11) odeM(A,F,t)$
```

```
(% i12) sol :ratsimp(%);
```

$$\begin{bmatrix} \left(\left(- \left(3\%e^{2t} C4 \right) - 9\%e^{2t} C3 - \%e^{2t} C2 - 3\%e^{2t} C1 \right) t - \%e^{2t} C4 - 3\%e^{2t} C3 \right) \sin(3t) + \left(\left(9\%e^{2t} C4 + 24\%e^{2t} C3 + 3\%e^{2t} C2 + 9\%e^{2t} C1 \right) t + 3\%e^{2t} C4 + 10\%e^{2t} C3 - 3\%e^{2t} C1 \right) \sin(3t) + \left(- \left(9\%e^{2t} C4 \right) - \left(- \left(3\%e^{2t} C4 \right) - 9\%e^{2t} C3 - \%e^{2t} C2 - 3\%e^{2t} C1 \right) \sin(3t) + \%e^{2t} C3 \right) \sin(3t) + \left(\%e^{2t} C3 t + 9\%e^{2t} C4 + 27\%e^{2t} C3 + 3\%e^{2t} C2 + 10\%e^{2t} C1 \right) \sin(3t) + \left(\left(3\%e^{2t} C4 + 9\%e^{2t} C3 + \%e^{2t} C2 \right) \sin(3t) + \left(3\%e^{2t} C4 + 9\%e^{2t} C3 + \%e^{2t} C2 \right) \cos(3t) \right) \end{bmatrix} \quad (\text{sol})$$

(% i13) sol[1,1];

$$\left(\left(- \left(3e^{2t}C4 \right) - 9e^{2t}C3 - e^{2t}C2 - 3e^{2t}C1 \right) t - e^{2t}C4 - 3e^{2t}C3 \right) \sin(3t) + \left(e^{2t}C3t + e^{2t}C1 \right) \cos(3t) \quad (\% \text{ o13})$$

(% i14) sol[2,1];

$$\left(\left(9e^{2t}C4 + 24e^{2t}C3 + 3e^{2t}C2 + 9e^{2t}C1 \right) t + 3e^{2t}C4 + 10e^{2t}C3 - 3e^{2t}C1 \right) \sin(3t) + \left(\left(- \left(9e^{2t}C4 \right) - \right) \right) \cos(3t) \quad (\% \text{ o14})$$

(% i15) sol[3,1];

$$\left(- \left(3e^{2t}C4 \right) - 9e^{2t}C3 - e^{2t}C2 - 3e^{2t}C1 \right) \sin(3t) + e^{2t}C3 \cos(3t) \quad (\% \text{ o15})$$

(% i16) sol[4,1];

$$\left(e^{2t}C3t + 9e^{2t}C4 + 27e^{2t}C3 + 3e^{2t}C2 + 10e^{2t}C1 \right) \sin(3t) + \left(\left(3e^{2t}C4 + 9e^{2t}C3 + e^{2t}C2 + 3e^{2t}C1 \right) t \right) \cos(3t) \quad (\% \text{ o16})$$

Test

(% i18) diff(sol,t)-A.sol\$
expand(%);

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\% \text{ o18})$$

21 odeM_ic

Function : odeM_ic(A, F, t, t0, Y0) Find solutions of initial problem for linear system of ODEs in matrix form :
 $Y' = AY + F$, $Y(t_0) = Y_0$.

21.1 Example 1 : $Y' = AY + F$, $Y(0)=Y_0$

(% i19) A :matrix([2,-4],[2,-2]);

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \quad (\text{A})$$

(% i20) F :transpose([4*e^(-2*t),0]);

$$\begin{bmatrix} 4e^{-(2t)} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{F})$$

(% i21) Y0 :transpose([0,0]);

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{Y0})$$

(% i22) sol :odeM_ic(A,F,t,0,Y0);

$$\begin{bmatrix} 2 \sin(2t) \\ \sin(2t) - \cos(2t) + e^{-(2t)} \end{bmatrix} \quad (\text{sol})$$

Test

(% i24) diff(sol,t)-A.sol-F\$ expand(%);

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\% \text{ o24})$$

(% i25) ev(sol,t=0);

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\% \text{ o25})$$

21.2 Example 2 : $Y' = AY$, $Y(0)=\text{transpose}([15,35,55,75])$.

(% i26) A :matrix([4,1,1,7],[1,4,10,1],[1,10,4,1],[7,1,1,4]);

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 10 & 4 & 1 \\ 7 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad (\text{A})$$

(% i27) F :transpose([0,0,0,0])\$

(% i28) Y0 :transpose([15,35,55,75]);

$$\begin{bmatrix} 15 \\ 35 \\ 55 \\ 75 \end{bmatrix} \quad (\text{Y0})$$

(% i29) charpoly(A, x),factor;

$$(x - 15) (x - 10) (x + 3) (x + 6) \quad (\% \text{ o29})$$

(% i30) sol :odeM_ic(A,F,t,0,Y0);

$$\begin{bmatrix} 27\%e^{15t} + 18\%e^{10t} - 30\%e^{-(3t)} \\ 54\%e^{15t} - 9\%e^{10t} - 10\%e^{-(6t)} \\ 54\%e^{15t} - 9\%e^{10t} + 10\%e^{-(6t)} \\ 27\%e^{15t} + 18\%e^{10t} + 30\%e^{-(3t)} \end{bmatrix} \quad (\text{sol})$$

Test

(% i32) diff(sol,t)-A.sol\$
expand(%);

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\% \text{ o32})$$

(% i33) ev(sol,t=0);

$$\begin{bmatrix} 15 \\ 35 \\ 55 \\ 75 \end{bmatrix} \quad (\% \text{ o33})$$

22 matrix_exp

Function : matrix_exp(A,t)Returns matrix exponential $e^{(A \cdot t)}$ computed via Laplace transforms.

22.1 Example 1

(% i34) A :matrix([1,1],[0,1]);

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A})$$

(% i35) matrix_exp(A,t);

$$\begin{bmatrix} \%e^t & \%e^t t \\ 0 & \%e^t \end{bmatrix} \quad (\% \text{ o35})$$

(% i36) e^'A=matrix_exp(A,1);

$$e^A = \begin{bmatrix} \%e & \%e \\ 0 & \%e \end{bmatrix} \quad (\% \text{ o36})$$

22.2 Example 2

(% i37) A :matrix([21,17,6],[-5,-1,-6],[4,4,16]);

$$\begin{bmatrix} 21 & 17 & 6 \\ -5 & -1 & -6 \\ 4 & 4 & 16 \end{bmatrix} \quad (\text{A})$$

(% i38) e^'A=matrix_exp(A,1);

$$e^A = \begin{bmatrix} \frac{13\%e^{16}}{4} - \frac{\%e^4}{4} & \frac{13\%e^{16}}{4} - \frac{5\%e^4}{4} & \frac{\%e^{16}}{2} - \frac{\%e^4}{2} \\ \frac{\%e^4}{4} - \frac{9\%e^{16}}{4} & \frac{5\%e^4}{4} - \frac{9\%e^{16}}{4} & \frac{\%e^4}{2} - \frac{\%e^{16}}{2} \\ 4\%e^{16} & 4\%e^{16} & \%e^{16} \end{bmatrix} \quad (\% \text{ o38})$$

23 odelinsys

Function : odelinsys(A, F, x, x0, Y0) Find solutions of initial problem for linear system of ODEs in matrix form : $Y' = AY + F$, $Y(x_0) = Y_0$.

(% i39) load(diag)\$

23.1 Example 1 : Solve $Y' = AY + F$, $Y(0) = Y_0$

(% i40) A :matrix([1,3],[-1,5]);

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \quad (\text{A})$$

(% i42) F :transpose([-x,2*x])\$ Y0 :transpose([3,1])\$

(% i43) sol :odelinsys(A,F,x,0,Y0);

$$\begin{bmatrix} \frac{11x}{8} + \frac{7\%e^{4x}}{32} + \frac{15\%e^{2x}}{8} + \frac{29}{32} \\ -\left(\frac{x}{8}\right) + \frac{7\%e^{4x}}{32} + \frac{5\%e^{2x}}{8} + \frac{5}{32} \end{bmatrix} \quad (\text{sol})$$

Test

(% i44) diff(sol,x)-A.sol-F,expand;

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\% \text{ o44})$$

23.2 Solve $Y' = AY$

(% i45) `A :matrix([4,-1,0],[3,1,-1],[1,0,1]);`

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A})$$

(% i46) `sol :odelinsys(A,[0,0,0],t,0,[C1,C2,C3]),factor;`

$$\begin{bmatrix} \frac{{\%e}^{2t}(C3t^2 - C2t^2 + C1t^2 - 2C2t + 4C1t + 2C1)}{2} \\ {\%e}^{2t} (C3t^2 - C2t^2 + C1t^2 - C3t - C2t + 3C1t + C2) \\ \frac{{\%e}^{2t}(C3t^2 - C2t^2 + C1t^2 - 2C3t + 2C1t + 2C3)}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{sol})$$

24 wronskian

Function : `wronskian ([f_1, ..., f_n], x)` Returns the Wronskian matrix of the list of expressions $[f_1, \dots, f_n]$ in the variable x .

(% i47) `kill(all)$`

(% i1) `load(odes2)$`

24.1 Example 1

(% i2) `wronskian([f(x),g(x),h(x)],x);`

$$\begin{bmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ \frac{d}{dx} f(x) & \frac{d}{dx} g(x) & \frac{d}{dx} h(x) \\ \frac{d^2}{dx^2} f(x) & \frac{d^2}{dx^2} g(x) & \frac{d^2}{dx^2} h(x) \end{bmatrix} \quad (\% \text{ o2})$$

24.2 Example 2

Form a linear homogeneous differential equation, knowing its fundamental system of solutions : $y_1 = x$, $y_2 = x^3$.

(% i3) `depends(y,x);`

$$[y(x)] \quad (\% \text{ o3})$$

(% i4) `wronskian([x,x^3,y],x);`

$$\begin{bmatrix} x & x^3 & y \\ 1 & 3x^2 & \frac{d}{dx} y \\ 0 & 6x & \frac{d^2}{dx^2} y \end{bmatrix} \quad (\% \text{ o4})$$

(% i5) `determinant(%)=0;`

$$x \left(3x^2 \left(\frac{d^2}{dx^2} y \right) - 6x \left(\frac{d}{dx} y \right) \right) - x^3 \left(\frac{d^2}{dx^2} y \right) + 6xy = 0 \quad (\% \text{ o5})$$

(% i6) `eq :expand(%/x/2);`

$$x^2 \left(\frac{d^2}{dx^2} y \right) - 3x \left(\frac{d}{dx} y \right) + 3y = 0 \quad (\text{eq})$$

(% i7) `ode2(eq,y,x);`

$$y = \%k1x^3 + \%k2x \quad (\% \text{ o7})$$